

Inżynieria wiedzy
Wnioskowanie rozmyte
Opracowane na podstawie materiałów dra Michała Berety

1. Zbiory rozmyte

Podstawowe pojęcia

Def. 1. *Zbiorem rozmytym* A w niepustej przestrzeni X nazywamy zbiór par:

$$A = \{(x, \mu_A(x)) : x \in X\}$$

gdzie funkcja $\mu_A(x) : X \rightarrow [0, 1]$ jest *funkcją przynależności zbioru rozmytego* A .

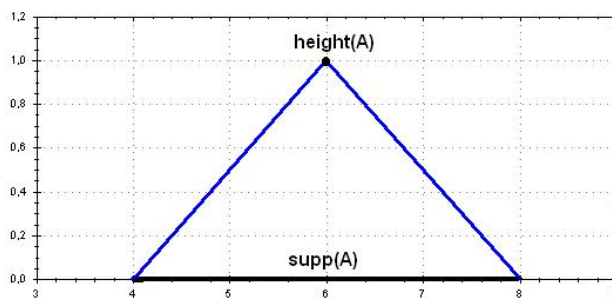
Funkcja μ_A każdemu elementowi $x \in X$ przypisuje jego stopień przynależności do zbioru rozmytego A .

Def. 2. Zbiór elementów przestrzeni X , dla których $\mu_A(x) > 0$ nazywamy *nośnikiem zbioru rozmytego* A i oznaczamy:

$$\text{supp}(A) = \{x \in X : \mu_A(x) > 0\}.$$

Def. 3. *Wysokość zbioru rozmytego* A określamy jako:

$$\text{supp}(A) = \sup_{x \in X} \{\mu_A(x)\}.$$



Rysunek 1. Nośnik i wysokość zbioru rozmytego o trójkątnej funkcji przynależności.

Podstawowe operacje na zbiorach rozmytych

Def. 4. *Dopełnieniem (negacją) zbioru rozmytego* $A \subseteq X$ nazywamy zbiór rozmyty $\neg A$ opisany funkcją przynależności:

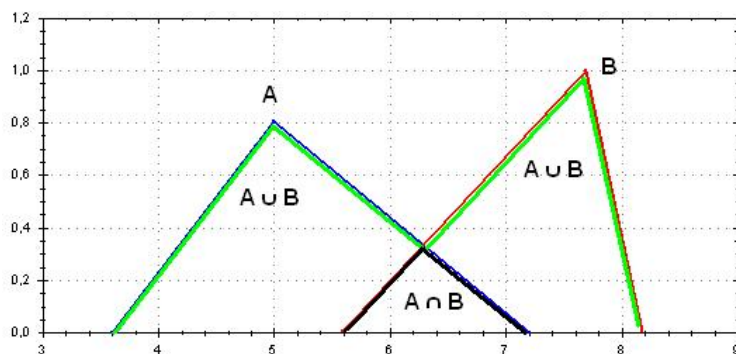
$$\mu_{\neg A}(x) = 1 - \mu_A(x), \quad \forall x \in X.$$

Def. 5. Sumą zbiorów rozmytych $A, B \subseteq X$ jest zbiór rozmyty $A \cup B$ o funkcji przynależności opisanej najczęściej wzorem:

$$\mu_{A \cup B}(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}, \quad \forall x \in X.$$

Def. 6. Przecięciem zbiorów rozmytych $A, B \subseteq X$ jest zbiór rozmyty $A \cap B$ o funkcji przynależności opisanej najczęściej wzorem:

$$\mu_{A \cap B}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}, \quad \forall x \in X.$$



Rysunek 2. Suma i przecięcie zbiorów rozmytych.

Operacje sumy i przecięcia zbiorów rozmytych można zdefiniować ogólniej w postaci:

$$\mu_{A \cup B}(x) = S(\mu_A(x), \mu_B(x)), \quad \forall x \in X,$$

$$\mu_{A \cap B}(x) = T(\mu_A(x), \mu_B(x)), \quad \forall x \in X,$$

gdzie funkcje S i T są odpowiednio S -normą, T -normą.

2. Wnioskowanie rozmyte

Wiadomości wstępne

Zbiory rozmyte pozwalają w sposób usystematyzowany modelować pojęcia nieprecyzyjne, jakimi ludzie posługują się na co dzień. Przykładem może być wyrażenie „wysoka temperatura”, „duża prędkość” czy „młody człowiek”. Również podczas rozumowania i podejmowania decyzji, ludzie wykorzystują takie rozmyte pojęcia. Rozumujemy na przykład: „jeśli droga jest bardzo kręta i widoczność jest bardzo słaba, należy jechać bardzo powoli”. W klasycznej matematyce mamy do czynienia z odmienną sytuacją. W klasycznej logice operujemy na zdaniach logicznych, które mogą być prawdziwe lub fałszywe i nie przyjmują stanów pośrednich. Jedną z reguł wnioskowania klasycznej logiki jest reguła *modus ponens*:

$$\frac{A, A \rightarrow B}{B}.$$

Z prawdziwości implikacji wiadomo, że zawsze ilekroć zachodzi A (A przyjmuje wartość „prawda”) to zachodzi również B . Skoro więc w pewnej konkretnej sytuacji zachodzi A , to możemy być pewni że zachodzi również B .

W logice rozmytej zamiast zdaniem, przyjmującymi wartość prawdę lub fałsz, posługujemy się zmiennymi lingwistycznymi, które przyjmują jako wartości nieprecyzyjne pojęcia języka mówionego, takie jak „mały”, „średni”, „duży”. Przykładowo, „temperatura” może być zmienną lingwistyczna i przyjmować wartości nieprecyzyjne „mała”, „średnia”, „wysoka”. Te nieprecyzyjne pojęcia, jak wiadomo, można modelować za pomocą odpowiednich zbiorów rozmytych. Zbiór reguł wnioskowania rozmytego przyjmuje postać:

Jeśli x_1 jest A_1^1 i x_2 jest A_2^1 i ... i x_n jest A_n^1 **to** y jest B_1

$\vdots$

Jeśli x_1 jest A_1^M i x_2 jest A_2^M i ... i x_n jest A_n^M **to** y jest B_M

x_i oraz y to zmienne lingwistyczne, A_j^i oraz B^i to wartości tych zmiennych lingwistycznych określone przez odpowiednie zbiory rozmyte. Górny indeks oznacza numer reguły, dolny numer zmiennej lingwistycznej. Rodzaj funkcji określającej funkcję przynależności danego zbioru rozmytego jak również jej współczynniki, mają duży wpływ na działanie modelu.

Odpowiednikiem rozumowania *modus ponens* w logice rozmytej będzie następująca reguła:

$$\frac{x \text{ jest } A', A \rightarrow B}{y \text{ jest } B'}$$

W tym przypadku x i y to zmienne lingwistyczne a A , A' , B , B' to zbory rozmyte. Najważniejszą rzeczą, którą warto zauważyć w powyższej regule to fakt, że zbiór A' występujący w przesłance wcale nie jest identyczny ze zbiorem rozmytym A występującym w rozmytej implikacji. Podobnie zbiór B' nie jest równy zbiorowi B . Pozwala to na pewną elastyczność. Jeśli bowiem zbiór A' określa podobną sytuację jak zbiór A , to możemy się spodziewać, że zbiór B' powinien być zbliżony znaczeniowo (lingwistycznie) do zbioru B .

Ilustruje to następujący przykład:

Mamy regułę rozmytą:

Jeśli prędkość samochodu jest bardzo duża, to poziom hałasu jest wysoki.

Przesłanka mówi natomiast:

Prędkość samochodu jest duża.

Widać zatem, że wartość lingwistyczna „bardzo duża” nie jest tożsama z wartością „duża”. Jednak z ich podobieństwa wynika, że powinniśmy oczekiwać podobnego wniosku jak w regule, przykładowo:

Poziom hałasu jest średnio wysoki.

Skoro więc ludzie posługując się nieprecyzyjnymi pojęciami i regułami rozmytymi, potrafią radzić sobie z szeregiem skomplikowanych zadań, istnieje praktyczna potrzeba symulowania takiego rodzaju rozumowania. Umożliwia to zastosowanie teorii zbiorów i logiki rozmytej. W ten sposób powstały sterowniki rozmyte.

Realizacja rozmytej implikacji

Reguła rozmyta typu $(A \rightarrow B)$, gdzie A oraz B są zbiorami rozmytymi, to rozmyta implikacja i może być zrealizowana na wiele sposobów. Dwa z popularnych sposobów jej realizacji to reguła minimum oraz iloczynu.

Jeśli zbiory A i B mają funkcje przynależności odpowiednio $\mu_A(x)$ oraz $\mu_B(y)$ to rozmyta implikacja $(A \rightarrow B)$ jest zbiorem rozmytym o funkcji przynależności określonej przez jedną z reguł, przykładowo:

1. reguła typu minimum: $\mu_{A \rightarrow B}(x, y) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(y)\}$,
2. reguła typu iloczyn: $\mu_{A \rightarrow B}(x, y) = \mu_A(x) \cdot \mu_B(y)$.

Realizacja rozmytego wnioskowania

W logice rozmytej wnioskowanie realizuje się przez złożenie rozmytego zbioru A' oraz rozmytej implikacji $(A \rightarrow B)$. W wyniku złożenia otrzymamy zbiór rozmyty B' , który stanowi wniosek.

$$B' = A' \circ (A \rightarrow B).$$

Złożenie to realizowane jest następująco:

$$\mu_{B'}(y) = \sup_{x \in X} \{T(\mu_{A'}(x), \mu_{A \rightarrow B}(x, y))\},$$

gdzie T oznacza pewną T-normę. Jeśli przykładowo T-norma jest typu min, otrzymuje się:

$$\mu_{B'}(y) = \sup_{x \in X} \{\min\{(\mu_{A'}(x), \mu_{A \rightarrow B}(x, y))\}\}.$$

Klasyczny sterownik rozmyty

Klasyczny sterownik rozmyty składa się z trzech części:

1. Bloku rozmywania (fuzyfikacji).
2. Bloku wnioskowania (inferencji) wraz z baza reguł.
3. Bloku wyostrzania.

Rodzaje modeli rozmytych

Najbardziej popularnymi rodzajami modeli rozmytych są:

1. Model *Mamdaniego*, gdzie reguły rozmyte mają postać:

Jeśli x jest A to y jest B ,

gdzie A i B to zbiory rozmyte.

Wnioskowanie_Mamdaniego.pdf.

2. Model *Takagi-Sugeno*, gdzie reguły rozmyte mają postać:

Jeśli x jest A to $y = f(x)$,

gdzie tylko A jest zbiorem rozmytym, natomiast y jest określany za pomocą pewnej funkcji.

Wnioskowanie_Sugeno.pdf.