

Zad.1. Dane są zbiory:

$$A = \{n \in \mathbb{N} : n \leq 11\}$$

$$B = \{n \in \mathbb{N} : n \leq 20, n - \text{parzyste}\}$$

$$C = \{n \in \mathbb{N} : n - \text{parzyste}\}$$

Wyznaczyć elementy następujących zbiorów: $A \cup B, A \cap B, A \setminus B, A \div B, A \div C$.

Zad.2. A - dowolny zbiór. Wyznaczyć zbiory: $A \div A, A \div \emptyset$.

Zad.3. Dane są zbiory $S = \{0, 1, 2, 3, 4\}, T = \{0, 2, 4\}$. Wyznaczyć elementy następujących zbiorów:

$$A = \{(x, y) \in S \times T : x < y\}$$

$$B = \{(x, y) \in T \times S : xy \geq 4\}$$

$$C = \{(x, y) \in T \times S : x \geq y\}$$

$$D = \{(x, y) \in S \times S : x + y = 10\}$$

Zad.4. Dany jest zbiór $S = \{0, 1, 2, 3\}$ na którym określone są relacje R_1, R_2, R_3, R_4 w następujący sposób:

$$(m, n) \in R_1 \Leftrightarrow m + n = 3$$

$$(m, n) \in R_1 \Leftrightarrow m - n \text{ jest parzysta}$$

$$(m, n) \in R_1 \Leftrightarrow m \leq n$$

$$(m, n) \in R_1 \Leftrightarrow m + n \leq 4$$

które z powyższych relacji są: Z, PZ, S, AS, P.

Zad.5. Dla $m, n \in \mathbb{R}$ określona jest relacja następująca relacji

$$m \sim n \Leftrightarrow (m - n) \text{ jest liczbą wymierną}$$

Pokazać, że „ $\sim$ ” jest relacją równoważności i wypisać po 4 element klas $[0], [1]$.

Zad.6. W zbiorze X dana jest relacja R . Zbadać czy jest ta relacja jest relacją równoważności. Jeżeli jest to wyznaczyć klasy abstrakcji tej relacji względem elementu 0.

a) $X = \mathbb{N}, \quad mRn \Leftrightarrow m^3 - 2n \text{ jest wielokrotnością } 4$

b) $X = \mathbb{N}, \quad mRn \Leftrightarrow n^2 - m^2 \equiv 0 \pmod{3}$

c) $X = \mathbb{N}, \quad mRn \Leftrightarrow n^2 - m^2 \equiv 0 \pmod{2}$

d) $X = \mathbb{N}, \quad mRn \Leftrightarrow m^3 - n^3 \equiv 0 \pmod{3}$

Zad.7. Niech $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ i niech ρ będzie relacją w rodzinie 2^X wszystkich podzbiorów X określoną w następujący sposób

$$A\rho B \Leftrightarrow |A| = |B|$$

gdzie $|\cdot|$ oznacza liczebność zbioru. Sprawdzić czy jest to relacja równoważności, wyznaczyć klasę równoważności $[\{1, 2\}]_\rho$.

Zad.8. Niech $S = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Rozważmy następujące funkcje ze zbioru S w zbiór S :

$$f(x) = 4 - x, \quad g(x) = \min(4, x), \quad h(x) = \max(1, x - 1)$$

które z tych funkcji są surjekcjami, które iniekcjami, a które bijekcjami.

Zad.9. Udowodnić indukcyjnie, dla $n \in \mathbb{N}$, że

a) $n^2 - 7 \geq 4n$ dla $n \geq 6$

b) $n^2 > 5n - 3$ dla $n \geq 5$

c) $2n^2 > 7n - 2$ dla $n \geq 4$

d) $11^n - 4^n$ jest podzielne przez 7

Zad.10. Obliczyć wartości wyrażeń:

$$S(5, 3), S(6, 2), S(7, 4), S(8, 5), S(6, 3), S(5, 2)$$

Zad.11. Ile jest liczb naturalnych od 1 do 100 niepodzielnych ani przez 3, ani przez 3, ani przez 5?.

Zad.12. W grupie 80 osób każdy biega, pływa lub skacze. Biegaczy jest 50, 45 pływaków, 40 skoczków, 27 osób zarówno pływa jak i biega, 10 trenuje wszystkie 3 dyscypliny, a 32 osoby na pewno nie skacze, ale na pewno biega.

a) Ile uprawia samo bieganie? A ile samo pływanie?

b) Ile osób biega lub pływa?

c) Ilu tylko skacze?

Zad.13. Uzasadnij, że wśród dowolnych 14 liczb naturalnych znajdziemy dwie, które przy dzieleniu przez 10 dają tę samą resztę.

Zad.14. Kabel długości 100cm tniemy dowolnie na 6 części. Zakładamy przy tym, że długości wyrażają się całkowitą liczbą centymetrów.

a) Uzasadnić, że zawsze któraś z części będzie miała przynajmniej 17cm.

b) Czy zawsze musi powstać część dłuższa niż 17cm?