

Wykłady z Matematyki Dyskretnej

dla kierunku Informatyka

dr Adam Marszałek

Instytut Informatyki
Politechnika Krakowska

Wykłady na bazie materiałów:
dra hab. Andrzeja Karafiata
dr hab. Joanny Kołodziej, prof. PK

Wykład:

- 18h, Prowadzący: dr Adam Marszałek (amarszalek@pk.edu.pl)

Ćwiczenia:

- 18h, Prowadzący: dr Adam Marszałek

Warunki zaliczenia przedmiotu:

- Obecności na wykładach i ćwiczeniach.
- Pozytywne zaliczenie ćwiczeń (kolokwia).
- Pozytywnie zdany egzamin.

Matematyka dyskretna - wspólna nazwa wszystkich działów matematyki, które zajmują się badaniem struktur nieciągłych, to znaczy zawierających zbiory co najwyżej przeliczalne (inaczej **dyskretnie**).

Podstawowe działy:

- teoria mnogości (zbiory, relacje, funkcje)
- logika matematyczna
- teoria grafów
- indukcja i rekurencja

Zbiór jest pojęciem pierwotnym, tzn. nie podajemy jego formalnej definicji. Intuicyjnie powiemy, że

zbiór jest kolekcją pewnych obiektów.

- Obiekty, które należą do pewnego zbioru nazywamy **elementami** tego zbioru. Pojęcie elementu zbioru również jest pojęciem pierwotnym.
- Zbiory będziemy oznaczać dużymi literami A, B, X a ich elementy małymi a, b, x itp.
- Zbiór pusty oznaczamy symbolem $\emptyset$.

- Zdanie „element a należy do zbioru A ” (lub „ a jest elementem zbioru A ”) zapisujemy

$$a \in A$$

- Zdanie „element a nie należy do zbioru A ” (lub „ a nie jest elementem zbioru A ”) zapisujemy

$$a \notin A$$

Przykład

Niech jedynymi elementami pewnego zbioru X będą liczby 1, 3, 5, 7, 9. Zapiszemy ten fakt jako

$$X = \{1, 3, 5, 7, 9\}.$$

Powiemy, że dwa zbiory X i Y są **równe**, $X = Y$, wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego x , jeśli $x \in X$, to $x \in Y$ i jeśli $x \in Y$, to $x \in X$. Będziemy stosowali również nieco krótszy zapis symboliczny:

$$X = Y \Leftrightarrow (x \in X \Rightarrow x \in Y) \wedge (x \in Y \Rightarrow x \in X).$$

Powiemy, że zbiór X **jest zawarty w** Y albo, że zbiór Y zawiera zbiór X , i piszemy $X \subset Y$ wtw gdy każdy element zbioru X jest równocześnie elementem zbioru Y .

Sumą zbiorów A i B nazywamy zbiór, którego elementami są wszystkie elementy zbioru A i wszystkie elementy zbioru B . Sumę zbiorów A i B oznaczamy $A \cup B$. Krótko zapiszemy

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B.$$

Iloczynem lub przecięciem zbiorów A i B nazywamy zbiór $A \cap B$ składający się z elementów, które należą równocześnie do A i do B ,

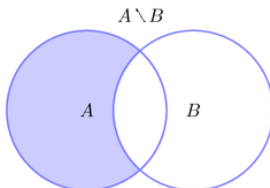
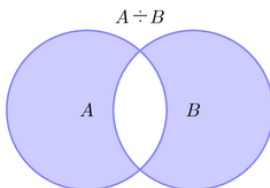
$$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B.$$

Różnicą zbiorów A i B nazywamy zbiór $A \setminus B$, którego elementami są te elementy zbioru A , które nie są elementami zbioru B :

Definicja: Różnica symetryczna zbiorów

Różnicą symetryczną zbiorów A i B nazywamy zbiór $A \div B$, elementami którego są te elementy zbioru $A \cup B$, które nie należą równocześnie do obu zbiorów A i B ,

$$x \in A \div B \Leftrightarrow x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$



Iloczynem kartezjańskim zbiorów X i Y , oznaczanym przez $X \times Y$, nazywamy zbiór złożony z wszystkich par uporządkowanych (x, y) takich, że $x \in X$ i $y \in Y$,

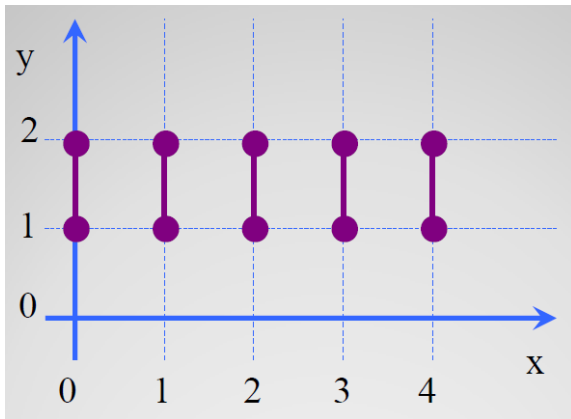
$$X \times Y = \{(x, y) : x \in X \wedge y \in Y\}.$$

Uwaga: Na ogół $X \times Y \neq Y \times X$.

Przykład

Niech $X = \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$, $Y = \{y \in \mathbb{R} : 1 \leq y \leq 2\}$. Wtedy

$$X \times Y = \{(x, y) : x \in \mathbb{N} \wedge y \in [1, 2]\}.$$



Relacje

Definicja intuicyjna

- **Relacja** – zależność (funkcja, stosunek, związek, powiązanie, więź) między dwoma bądź wieloma elementami.
- Własność przysługująca pewnym elementom.
- Językiem relacji można opisywać wiele zjawisk życia codziennego: relacje rodzinne, relacje społeczne (międzyludzkie), relacje emocjonalne.

Definicja: Relacja

Niech X i Y będą dwoma zbiorami. Dowolny podzbiór r iloczynu kartezjańskiego $X \times Y$ nazywamy **relacją dwuczłonową** (lub dwuargumentową lub binarną) w $X \times Y$.

- Jeśli $X = Y$, to mówimy, że r jest relacją binarną w X .
- Jeśli $(x, y) \in r$, to piszemy $x r y$ i mówimy, że relacja r zachodzi między elementami x i y .

Przykłady relacji

Przykład

Niech $A = \{\text{Janek}, \text{Piotr}, \text{Kasia}\}$, $B = \{\text{bieganie}, \text{tenis}, \text{pływanie}\}$
 $r = \{(a, b) \in A \times B : \text{osoba z } A \text{ lubi uprawiać sport z } B\}$

Przykład

Niech $A = \{3, 4, 6, 8\}$
 $r = \{(a, b) \in A \times A : a \text{ jest dzielnikiem liczby } b\}$

Przykład

Relacje określone w zbiorze liczby rzeczywistych (lub całkowitych):

- $x r y \Leftrightarrow x \leq y$
- $x r y \Leftrightarrow x \neq y$
- $x r y \Leftrightarrow x + y < 10$

Relacja modulo

Definicja: Relacja modulo

Niech p będzie ustaloną liczbą całkowitą, większą niż 1. Weźmy liczby całkowite m i n . Mówimy, że **liczba m przystaje do liczby n modulo p** i piszemy

$$m \equiv n \pmod{p},$$

gdy różnica $(m - n)$ jest wielokrotnością p .

Przykłady

- $7 \equiv 2 \pmod{5}$, bo $7 - 2$ jest podzielne przez 5
- $12 \equiv 22 \pmod{10}$, bo $12 - 22$ jest podzielne przez 10

Arytmetyka modularna jest używana między innymi w kryptografii (szyfr RSA - Ronald Rivest, Adi Shamir, Leonard Adleman).

Dziedzina i przeciwdziedzina relacji

Definicja: Dziedzina relacji

Dziedzina relacji $r \subseteq X \times Y$ nazywamy zbiór $D(r)$ tych $x \in X$, dla których istnieje $y \in Y$, taki że $(x, y) \in r$,

$$D(r) = \{x \in X : \text{istnieje } y \in Y \text{ dla którego } (x, y) \in r\}.$$

Definicja: Przeciwdziedzina relacji

Przeciwdziedzina relacji $r \subseteq X \times Y$ nazywamy zbiór $D^*(r)$ tych $y \in Y$, dla których istnieje $x \in X$, taki że $(x, y) \in r$,

$$D^*(r) = \{y \in Y : \text{istnieje } x \in X \text{ dla którego } (x, y) \in r\}.$$

Przykład

$$A = \{3, 4, 9, 16\}, r = \{(a, b) \in A \times A : a = b^2\}$$

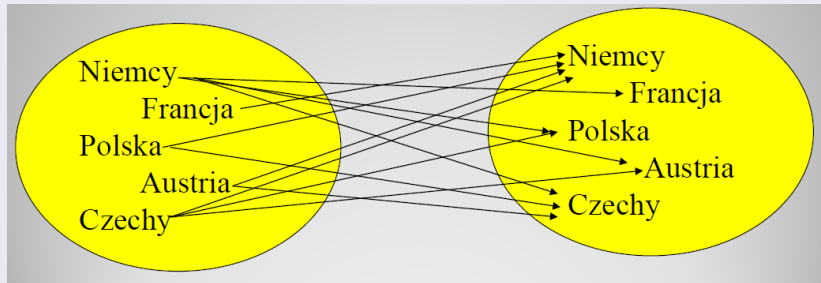
- $D(r) = \{9, 16\}$
- $D^*(r) = \{3, 4\}$

Sposoby reprezentacji relacji

Niech $A = \{Niemcy, Francja, Polska, Austria, Czechy\}$,

$$r = \{(a, b) \in A \times A: \text{państwo } a \text{ graniczy z państwem } b\}$$

Diagram prosty



Sposoby reprezentacji relacji

Niech $A = \{\text{Niemcy}, \text{Francja}, \text{Polska}, \text{Austria}, \text{Czechy}\}$,

$$r = \{(a, b) \in A \times A : \text{państwo } a \text{ graniczy z państwem } b\}$$

Lista elementów zbioru r

$$r = \{(\text{Niemcy}, \text{Francja}), (\text{Niemcy}, \text{Polska}), (\text{Niemcy}, \text{Austria}), \\ (\text{Niemcy}, \text{Czechy}), (\text{Francja}, \text{Niemcy}), (\text{Polska}, \text{Niemcy}), \\ (\text{Polska}, \text{Czechy}), (\text{Austria}, \text{Niemcy}), (\text{Austria}, \text{Czechy}), \\ (\text{Czechy}, \text{Niemcy}), (\text{Czechy}, \text{Polska}), (\text{Czechy}, \text{Austria})\}$$

Sposoby reprezentacji relacji

Niech $A = \{\text{Niemcy}, \text{Francja}, \text{Polska}, \text{Austria}, \text{Czechy}\}$,

$r = \{(a, b) \in A \times A : \text{państwo } a \text{ graniczy z państwem } b\}$

Tabela relacji (macierz relacji)

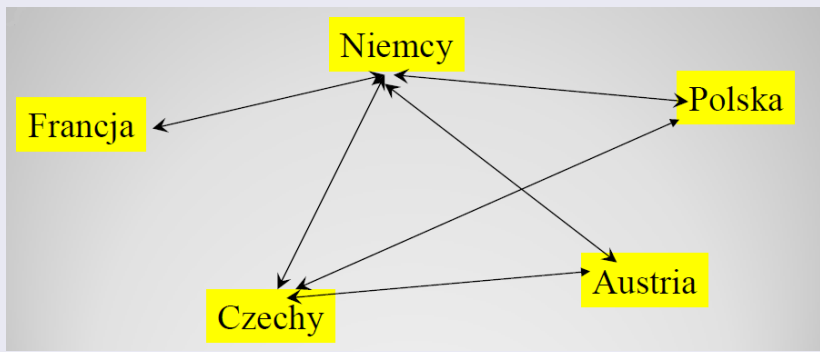
	Niemcy	Francja	Polska	Austria	Czechy
Niemcy	-	+	+	+	+
Francja	+	-	-	-	-
Polska	+	-	-	-	+
Austria	+	-	-	-	+
Czechy	+	-	+	+	-

Sposoby reprezentacji relacji

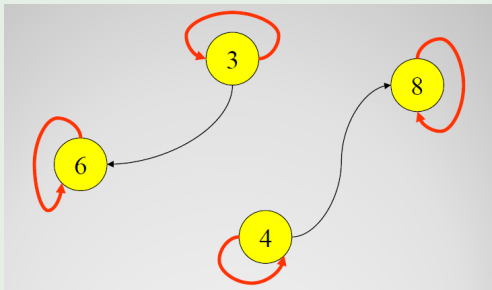
Niech $A = \{\text{Niemcy}, \text{Francja}, \text{Polska}, \text{Austria}, \text{Czechy}\}$,

$r = \{(a, b) \in A \times A : \text{państwo } a \text{ graniczy z państwem } b\}$

Graf relacji



Relację binarną $r \subseteq X \times X$ nazywamy **zwrotną** wtw gdy dla każdego $x \in X$ para $(x, x) \in r$, to znaczy $\{(x, x) : x \in X\} \subseteq r$

$$A = \{3, 4, 6, 8\}, r = \{(a, b) \in A^2 : a \text{ jest dzielnikiem liczby } b\}$$


Własności relacji

Definicja: Przeciwwzrotność

Relację binarną $r \subseteq X \times X$ nazywamy **przeciwwzrotną** wtw gdy dla każdego $x \in X$ para $(x, x) \notin r$, to znaczy $\{(x, x) : x \in X\} \cap r = \emptyset$

Przykład

Niech $A = \{\text{Niemcy}, \text{Francja}, \text{Polska}, \text{Austria}, \text{Czechy}\}$,
 $r = \{(a, b) \in A \times A : \text{państwo } a \text{ graniczy z państwem } b\}$

	Niemcy	Francja	Polska	Austria	Czechy
Niemcy	-	+	+	+	+
Francja	+	-	-	-	-
Polska	+	-	-	-	+
Austria	+	-	-	-	+
Czechy	+	-	+	+	-

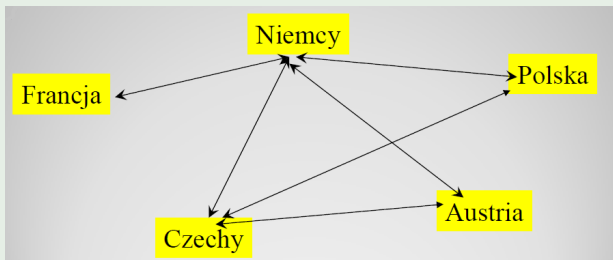
Własności relacji

Definicja: Symetryczność

Relację binarną $r \subseteq X \times X$ nazywamy **symetryczną** wtw gdy dla dowolnych $x, y \in X$, jeżeli para $(x, y) \in r$, to również para $(y, x) \in r$.

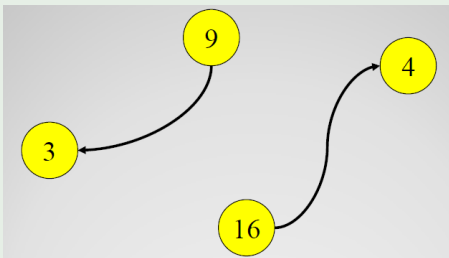
Przykład

Niech $A = \{\text{Niemcy}, \text{Francja}, \text{Polska}, \text{Austria}, \text{Czechy}\}$,
 $r = \{(a, b) \in A \times A : \text{państwo } a \text{ graniczy z państwem } b\}$



Relację binarną $r \subseteq X \times X$ nazywamy **przeciwsymetryczną (asymetryczną)** wtw gdy dla dowolnych $x, y \in X$, jeżeli para $(x, y) \in r$, to para $(y, x) \notin r$.

Niech $A = \{3, 4, 9, 16\}$, $r = \{(a, b) \in A \times A : a = b^2\}$

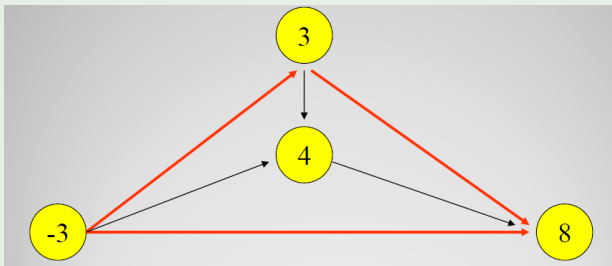


Relację binarną $r \subseteq X \times X$ nazywamy **antysymetryczną** wtw gdy dla dowolnych $x, y \in X$, jeżeli para $(x, y) \in r$, oraz para $(y, x) \in r$, to $x = y$.

$$A = \{3, 4, 6, 8\}, r = \{(a, b) \in A \times A : a \text{ jest dzielnikiem liczby } b\}$$

	3	4	6	8
3	+	-	+	-
4	-	+	-	+
6	-	-	+	-
8	-	-	-	+

Relację binarną $r \subseteq X \times X$ nazywamy **przechodnią** wtw gdy dla dowolnych $x, y, z \in X$, jeżeli para $(x, y) \in r$, oraz para $(y, z) \in r$, to również para $(x, z) \in r$.

$$A = \{-3, 3, 4, 8\}, r = \{(a, b) \in A \times A : a \text{ jest mniejsze od } b\}$$


Relację binarną r określoną w zbiorze X nazywamy **relacją równoważności** wtw gdy relacja r jest zwrotna, symetryczna i przechodnia, tzn. dla dowolnych $x, y, z \in X$

- 1 $(x, x) \in r$
- 2 jeśli $(x, y) \in r$, to $(y, x) \in r$
- 3 jeśli $(x, y) \in r$ oraz $(y, z) \in r$, to $(x, z) \in r$

Niech $X = \mathbb{Z}$ (zbiór liczb całkowitych),

$r = \{(x, y) \in X^2: |x| = |y|\}$ jest relacją równoważności

Klasa abstrakcji (równoważności, warstwa)

Definicja: Klasa abstrakcji

Niech r będzie relacją równoważności określoną w zbiorze X , wówczas **klasą abstrakcji elementu x względem relacji r** nazywamy zbiór postaci

$$[x]_r = \{y \in X : x r y\}.$$

O elemencie x mówimy, że jest **reprezentantem** klasy $[x]_r$.

Przykład

Niech $X = \mathbb{Z}$, $r = \{(x, y) \in X^2 : |x| = |y|\}$

- $[1]_r = \{x : x r 1\} = \{x : |x| = |1|\} = \{-1, 1\}$
- $[2]_r = \{x : x r 2\} = \{x : |x| = |2|\} = \{-2, 2\}$
- ...
- $[k]_r = \{x : x r k\} = \{x : |x| = |k|\} = \{-k, k\}$

Najważniejsze własności klas abstrakcji

Własności klas abstrakcji

Niech r będzie relacją równoważności w zbiorze X oraz niech $[x]_r, [y]_r$ będą klasami abstrakcji odpowiednio elementów x i y .

Wówczas:

- 1 $x \in [x]_r$
- 2 $[x]_r = [y]_r \Leftrightarrow x r y$
- 3 jeżeli $[x]_r \neq [y]_r$, to $[x]_r \cap [y]_r = \emptyset$.

Podziały zbioru

Definicja: Podział zbioru

Podziałem n -elementowego zbioru X na k podzbiorów nazywamy rodzinę zbiorów $\{X_1, X_2, \dots, X_k\}$ taką, że

- 1 $X_i \cap X_j = \emptyset$ dla $i \neq j$
- 2 $X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_k = X$

Twierdzenie: Zasada abstrakcji

- 1 Każda relacja równoważności r w niepustym zbiorze X , wyznacza podział tego zbioru na niepuste i rozłączne podzbiory, a mianowicie na klasy abstrakcji relacji r .
- 2 Każdy podział zbioru X wyznacza relację równoważności, której klasami abstrakcji są dokładnie zbiory tego podziału.

Przykłady

Przykład

Niech $X = \mathbb{Z}$, $r = \{(x, y) \in X^2: |x| = |y|\}$.

- $[k]_r = \{x: x r k\} = \{x: |x| = |k|\} = \{-k, k\}$

Relacja r dzieli zbiór liczb całkowitych na podzbiory postaci $\{-k, k\}$ dla $k \in \mathbb{Z}$.

Przykład

Niech $X = \mathbb{Z}$, $r = \{(m, n) \in X^2: m \equiv n \pmod{5}\}$. Relacja r dzieli zbiór liczb całkowitych na 5 podzbiorów:

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} = & \{5k: k \in \mathbb{Z}\} \cup \{5k+1: k \in \mathbb{Z}\} \cup \{5k+2: k \in \mathbb{Z}\} \cup \\ & \cup \{5k+3: k \in \mathbb{Z}\} \cup \{5k+4: k \in \mathbb{Z}\} \end{aligned}$$

Elementy kombinatoryki

Definicja: Wariancja z powtórzeniami

Ciąg k elementów należących do n -elementowego zbioru S nazywamy k -elementową **wariancją z powtórzeniami**. Ilość k -elementowych wariancji z powtórzeniami ze zbioru n -elementowego wynosi n^k .

Definicja: Wariancja bez powtórzeń

Ciąg k **różnych** elementów należących do n -elementowego zbioru S nazywamy k -elementową **wariancją bez powtórzeń**. Ilość k -elementowych wariancji bez powtórzeń ze zbioru n -elementowego wynosi $\frac{n!}{(n-k)!}$.

Elementy kombinatoryki

Definicja: Permutacja

Ciąg n **różnych** elementów należących do n -elementowego zbioru S nazywamy **permutacją** elementów tego zbioru. Polega ona na przedstawieniu kolejności elementów tego zbioru. Ilość permutacji zbioru n -elementowego wynosi $n!$.

Definicja: Kombinacja

Zbiór k **różnych** elementów należących do n -elementowego zbioru S , w którym porządek elementów jest nieistotny, nazywamy k -elementową **kombinacją** ze zbioru n -elementowego. Ilość k -elementowych kombinacji ze zbioru n -elementowego wynosi $\binom{n}{k}$.

Prawa zliczania

Definicja: Moc zbioru

Moc n -elementowego zbioru **skończonego** jest równa n (liczba elementów tego zbioru). Moc zbioru A oznaczать będziemy symbolem $|A|$. Inne oznaczenia: $n(A)$, $\text{card}(A)$ lub $\#A$.

Tw: Prawa sumy

Niech S i T będą zbiorami skończonymi, wówczas

- 1 Jeżeli S i T są rozłączne, to $|S \cup T| = |S| + |T|$
- 2 Ogólnie: $|S \cup T| = |S| + |T| - |S \cap T|$

Prawa zliczania

Tw: Prawa iloczynu

- ❶ Niech S i T będą zbiorami skończonymi, wówczas

$$|S \times T| = |S| \cdot |T|, \text{ bo } S \times T = \{(s, t) : s \in S, t \in T\}$$
- ❷ Niech $S_1, S_2, \dots, S_k$ będą zbiorami skończonymi, $k \in \mathbb{Z}$, wówczas

$$|S_1 \times S_2 \times \dots \times S_k| = |S_1| \cdot |S_2| \cdot \dots \cdot |S_k|$$

Tw: Zasada włączeń i wyłączeń

Niech $S_1, S_2, \dots, S_n$ będą zbiorami skończonymi, wówczas

$$\begin{aligned}
 |S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_n| &= \sum_{i=1}^n |S_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |S_i \cap S_j| + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |S_i \cap S_j \cap S_k| - \\
 &\quad \dots + (-1)^{n-1} |S_1 \cap S_2 \cap \dots \cap S_n|
 \end{aligned}$$

Liczba składników: $\binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n - 1$

Przykłady

Przykład

Ile liczb naturalnych ze zbioru $S = \{1, 2, \dots, 1000\}$ jest podzielnych przez 4 lub przez 6?

Przykład

PIN w telefonie komórkowym składa się z 4 cyfr. Ile jest możliwych haseł PIN?

Przykład

Ile liczb naturalnych ze zbioru $S = \{1, 2, \dots, 1000\}$ jest podzielnych przez 4, 6 lub przez 9?

Wzór dwumianowy Newtona

Definicja: Symbol Newtona

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad \text{dla } 0 \leq k \leq n, k \in \mathbb{Z}_+$$

Wzór dwumianowy Newtona

Dla każdego $a, b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Jest $\binom{n+k-1}{k-1}$ sposobów rozmieszczenia n identycznych przedmiotów w k rozróżnialnych pudełkach.

W k pudełkach mamy nieograniczone zapasy przedmiotów. Na ile sposobów można z nich wyjąć n przedmiotów?

- 1 Na ile sposobów można rozmieścić 12 jednakowych kulek w 4 rozróżnialnych torbach?
- 2 Na ile sposobów można wybrać 12 monet spośród nieograniczonego zapasu monet 1, 2, 5, 10, 20 i 50 groszowych?

W zbiorze n -elementowym można określić 2^{n^2} relacji binarnych.

W zbiorze n -elementowym można określić $2^{(n-1)n}$ relacji zwrotnych.

W zbiorze n -elementowym można określić $2^{(n+1)n/2}$ relacji symetrycznych.

Jak uzasadnić poprawność powyższych lematów?

Zliczanie podziałów zbioru

Definicja: Liczba Stirlinga

Liczbą Stirlinga $S(n, k)$ nazywamy liczbę podziałów zbioru n -elementowego na k części (bloków).

Tw: Liczba relacji równoważności

Liczba różnych relacji równoważności w n -elementowym zbiorze jest równa sumie wszystkich możliwych podziałów tego zbioru na $1, 2, \dots, n$ części, czyli $\sum_{k=0}^n S(n, k)$.

$$S(n, k) = 0, \text{ gdy } k > n,$$
$$S(n, n) = 1, S(n, 1) = 1, S(n, 0) = 0 \text{ dla } n > 0.$$

Liczbę Stirlinga $S(n, k)$ obliczamy z wzoru rekurencyjnego

$$S(n, k) = 0, \text{ gdy } k > n,$$

$$S(n, n) = 1, S(n, 1) = 1, S(n, 0) = 0 \text{ dla } n > 0.$$

Liczbę Stirlinga $S(n, k)$ obliczamy z wzoru rekurencyjnego

$$S(n, k) = S(n - 1, k - 1) + k \cdot S(n - 1, k).$$

Trójkąt Stirlinga:

$$S(0,0)$$

$$S(1,0) \quad S(1,1)$$

S(2,0) S(2,1) S(2,2)

S(3,0) S(3,1) S(3,2) S(3,3)

$$S(2,1)+3S(2,2)$$

Niech X i Y będą dowolnymi zbiorami. Relację binarną $f \subseteq X \times Y$ nazywamy **funkcją** ze zbioru X w zbiór Y (co zapisujemy w postaci $f: X \rightarrow Y$) wtw, gdy dla każdego $x \in X$ istnieje co najwyżej jeden element $y \in Y$ taki, że $(x, y) \in f$. Jeżeli para $(x, y) \in f$, to piszemy $y = f(x)$.

Powiemy, że funkcja $f: X \rightarrow Y$ jest **injekcją** (różnowartościowa), jeżeli różnym argumentom przypisuje różne wartości, tzn. jeśli $x_1 \neq x_2$, to $f(x_1) \neq f(x_2)$ dla dowolnych $x_1, x_2 \in X$.

Powiemy, że funkcja $f: X \rightarrow Y$ jest **surjekcją** (odwzorowaniem „na” zbiór Y) wtw, gdy każdy element zbioru Y jest wartością funkcji, tzn. dla dowolnego $y \in Y$ istnieje $x \in X$, że $f(x) = y$.

Liczba funkcji

Liczba wszystkich funkcji $f: X \rightarrow Y$ wynosi $|Y|^{|X|}$.

Liczba iniekcji

Liczba wszystkich iniekcji $f: X \rightarrow Y$ wynosi

$$|Y| \cdot (|Y| - 1) \cdot \dots \cdot (|Y| - |X| + 1) = \frac{|Y|!}{(|Y| - |X|)!}.$$

Liczba surjekcji

Liczba wszystkich surjekcji $f: X \rightarrow Y$ wynosi $|Y|! \cdot S(|X|, |Y|)$.

Jeżeli zbiór S podzielony jest na k podzbiorów, to co najmniej jeden z nich ma co najmniej $\frac{|S|}{k}$ elementów.

Dana jest funkcja $f: X \rightarrow Y$ (X, Y skończone). Jeżeli istnieje liczba całkowita k taka, że $|X| > k \cdot |Y|$, to wówczas co najmniej jeden z przeciwbrazów $f^{-1}(y)$, $y \in Y$ ma więcej niż k elementów.

Niech $A_1, \dots, A_n$ będą podzbiórami zbioru (skończonego) S takimi, że każdy element zbioru S należy do co najmniej k zbiorów A_i . Wtedy średnia arytmetyczna liczb elementów zbiorów A_i wynosi co najmniej $k \cdot \frac{|S|}{n}$.