Wykłady z Matematyki Dyskretnej

dla kierunku Informatyka

dr Adam Marszałek

Instytut Informatyki
Politechnika Krakowska

Wykłady na bazie materiałów:
dra hab. Andrzeja Karafiata
dr hab. Joanny Kołodziej, prof. PK

Graf nieskierowany

Definicja: Graf nieskierowany

Grafem nieskierowanym nazywamy uporządkowaną trójkę:

$$G = \langle V, E, \gamma \rangle$$

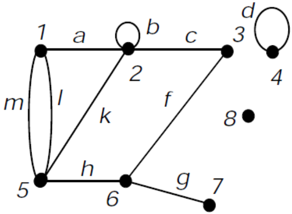
gdzie:
V - niepusty zbiór wierzchołków grafu G,
E - zbiór krawędzi grafu G,
γ - funkcja ze zbioru E w zbiór $\{\{u, v\} : u, v \in V\}$ wszystkich podzbiorów jedno lub dwuelementowych zbioru V.

Definicja: Krawędź i jej końce

Jeżeli $e \in E$ oraz $\gamma(e) = \{v_1, v_2\}$, to elementy v_1 i v_2 nazywamy **końcami krawędzi** e.

Przykład

W praktyce często wykorzystujemy graficzną reprezentację grafu



Niech $G = \langle V, E, \gamma \rangle$, gdzie:
$V = \{1, 2, \ldots, 8\}$, $E = \{a, b, c, d, e, f, g, h, k, l, m\}$,
zaś funkcja γ określona jest za pomocą tabeli

e	a	b	c	d	f	g	h
$\gamma(\mathbf{e})$	$\{1,2\}$	$\{2\}$	$\{2,3\}$	$\{4\}$	$\{3,6\}$	$\{6,7\}$	$\{5,6\}$

k	l	m
$\{2,5\}$	$\{1,5\}$	$\{1,5\}$

Krawędzie grafu

Definicja: Pętla

Jeżeli $\gamma(e) = \{v, v\} = \{v\}$, to krawędź e nazywamy **pętlą**.

Na poprzednim rysunku pętlami są krawędzie b i d, ponieważ $\gamma(b) = \{2\}$ i $\gamma(d) = \{4\}$.

Definicja: Krawędź wielokrotna

Jeżeli krawędzie e i f są różne ($e \neq f$) i $\gamma(e) = \gamma(f)$, to nazywamy je **krawędziami wielokrotnymi (równoległymi)**.

Na rysunku krawędziami wielokrotnymi są krawędzie m i l, bowiem $\gamma(l) = \gamma(m) = \{1, 5\}$.

Uwaga

W przypadku, gdy nie ma w grafie G krawędzi wielokrotnych, to funkcja γ jest różnowartościowa.

Wierzchołki i krawędzie grafu

Definicja

Jeżeli w grafie G, a i b nie są krawędziami równoległymi oraz $\gamma(a) = \{x, y\}$ i $\gamma(b) = \{y, z\}$, to mówimy, że:

1. Krawędzie a i b są **krawędziami sąsiednim** lub **przyległymi** (mają wspólny wierzchołek y).
2. Wierzchołki x, y (oraz y i z) są **wierzchołkami sąsiednimi**.
3. Wierzchołek x (a także y) jest incydentny do krawędzi a (jest końcem tej krawędzi).

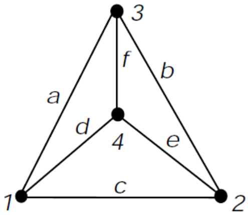
Graf prosty i graf pełny

Definicja: Graf prosty

Graf bez krawędzi wielokrotnych i pętli nazywamy **grafem prostym**.

Definicja: Graf pełny

Graf prosty, w którym każde dwa wierzchołki są połączone krawędzią nazywamy **grafem pełnym**. Graf pełny o n wierzchołkach oznaczamy przez K_n.



Graf prosty

W przypadku grafów bez krawędzi wielokrotnych (w szczególności w przypadku grafów prostych) definicja grafu można uprościć do podania zbioru wierzchołków V i krawędzi w postaci $\{p, q\}$, gdzie $p, q \in V$, np. na rysunku zamiast pisać $\gamma(a) = \{1, 3\}$ będziemy pisać $a = \{1, 3\}$.

Uwaga

W dalszej części graf bez krawędzi wielokrotnych (w szczególności graf prosty) będziemy zapisywali jako

$$G = \langle V, E\rangle$$

pamiętając, że $E = \{\{p, q\} : p, q \in V\}$.

Stopień wierzchołka

Definicja: Stopień wierzchołka

Liczbę krawędzi incydentnych do danego wierzchołka v (z pętlami liczonymi podwójnie) nazywamy **stopniem wierzchołka** v i oznaczamy $deg(v)$

Liczbę wierzchołków stopnia k oznaczamy przez $D_k(G)$

Dla każdego grafu definiujemy ciąg stopni wierzchołków grafu G w postaci

$$(D_0(G), D_1(G), D_2(G), \dots)$$

Definicja: Stopień grafu

Stopniem grafu G nazywamy liczbę

$$\Delta(G) = \max_{v \in V} deg(v)$$

Stopień grafu jest więc równy najwyższemu ze stopni jego wierzchołków.

Stopień wierzchołka

Definicja: Wierzchołek izolowany

Wierzchołek stopnia zerowego nazywamy **wierzchołkiem izolowanym**.

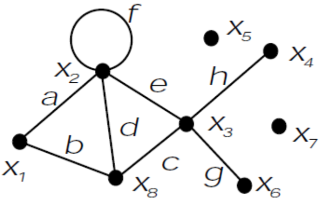
Definicja: Wierzchołek końcowy

Wierzchołek stopnia pierwszego nazywamy wierzchołkiem **końcowym** lub **wiszącym**.

Definicja: Krawędzie szeregowe

Mówimy, że dwie nierównoległe krawędzie są **krawędziami szeregowymi**, jeżeli ich wspólny wierzchołek jest stopnia drugiego.

Przykład



- wierzchołki izolowane: x_5, x_7
- wierzchołki wiszące: x_4, x_6
- $deg(x_1) = 2,\ deg(x_2) = 5,\ deg(x_3) = 4,$
  $deg(x_4) = deg(x_6) = 1,\ deg(x_5) = deg(x_7) = 0, deg(x_8) = 3$
- ciąg stopni wierzchołków: $(2, 2, 1, 1, 1, 1)$
- stopień grafu: $\Delta(G) = 5$
- krawędzie szeregowe: a i b

Stopień wierzchołka

Twierdzenie: Suma stopni wierzchołków

Suma stopni wszystkich wierzchołków w grafie $G = \langle V, E, \gamma \rangle$ jest dwa razy większa od ilości jego krawędzi, tj.

$$\sum_{v \in V} deg(v) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot D_k(G) = 2 \cdot |E|$$

Wniosek

W grafie pełnym o n wierzchołkach każdy wierzchołek ma stopień $n - 1$.

Wniosek

Ilość wierzchołków stopnia nieparzystego w grafie G musi być parzysta.

Izomorfizm grafów

Niech dane będą grafy $G_1 = \langle V_1, E_1, \gamma_1 \rangle$ oraz $G_2 = \langle V_2, E_2, \gamma_2 \rangle$.

Definicja

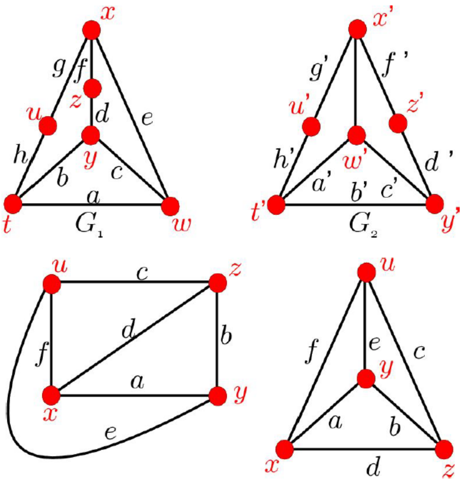
Jeżeli G_1 i G_2 są grafami prostymi to wówczas mówimy, że grafy G_1 i G_2 są **izomorficzne**, jeżeli istnieje wzajemnie jednoznaczne przekształcenie $\alpha\colon V_1 \to V_2$ takie, że krawędź $\{u, v\}$ jest krawędzią grafu G_1 wtw, gdy krawędź $\{\alpha(u), \alpha(v)\}$ jest krawędzią grafu G_2.

Definicja

Jeżeli G_1 i G_2 są dowolnymi grafami to wówczas mówimy, że grafy G_1 i G_2 są **izomorficzne**, jeżeli istnieją wzajemnie jednoznaczne przekształcenia $\alpha\colon V_1 \to V_2$ i $\beta\colon E_1 \to E_2$ takie, że krawędź $e \in E_1$ łączy wierzchołki $u, v \in V_1$ wtw, gdy odpowiadająca jej krawędź $\beta(e) \in E_2$ łączy wierzchołki $\alpha(u), \alpha(v)$.

Zapis $G_1 \simeq G_2$ czytamy: grafy G_1 i G_2 są izomorficzne.

Izomorfizm grafów



Izomorfizm grafów

Z definicji izomorfizmu wynika, że grafy izomorficzne muszą mieć:

- tę samą liczbę wierzchołków
- tę samą liczbę krawędzi
- tę samą liczbę pętli
- tę samą liczbę wierzchołków końcowych
- tę samą liczbę wierzchołków izolowanych
- równą liczbę wierzchołków tego samego stopnia
- ten sam ciąg stopni wierzchołków

Powyższe warunkami są warunkami koniecznymi izomorfizmu dwóch grafów, ale nie są warunkami wystarczającymi.

Graf skierowany

Definicja: Graf skierowany

Grafem skierowanym lub **digrafem** G (directed graph) nazywamy uporządkowaną trójkę $G = \langle V, E, \gamma \rangle$, gdzie
V - jest niepustym zbiorem wierzchołków,
E - jest zbiorem krawędzi skierowanych (łuków),
γ - jest odwzorowaniem zbioru E w zbiór $V \times V$.

Definicja: Łuk

Jeżeli e jest łukiem grafu G ($e \in E$) i $\gamma(e) = (p, q)$ ($(p, q) \in V \times V$), to

- p nazywamy **początkiem łuku**
- q nazywamy **końcem łuku**
- o łuku e mówimy również, że
  - łuk e biegnie od wierzchołka p do wierzchołka q
  - łuk e wychodzi z wierzchołka p i wchodzi do wierzchołka q
  - łuk e jest incydentny z wierzchołka p i jest incydentny w wierzch. q

Graf skierowany

Analogicznie, jak w przypadku grafu nieskierowanego mamy

Definicja: Pętla

Jeżeli $\gamma(e) = (p, p)$, to e nazywamy **pętlą**.

Definicja: Krawędź wielokrotna

Jeżeli $e, k \in E$ oraz $\gamma(e) = (p, q)$ i $\gamma(k) = (p, q)$, to krawędzie e i k nazywamy **równoległymi** lub **wielokrotnymi**.

Definicja: Graf prosty

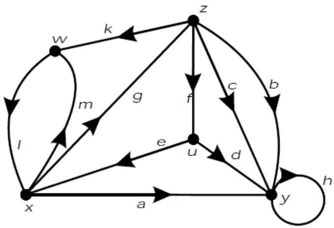
Jeżeli G jest grafem prostym (bez pętli i krawędzi równoległych), to przekształcenie γ jest różnowartościowe a graf G możemy oznaczać jako $G = \langle V, E \rangle$.

Przykład

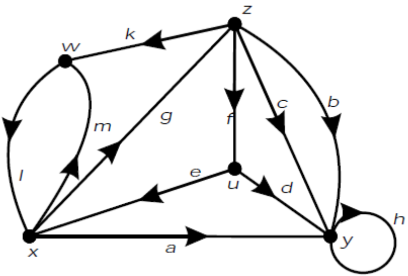
Weźmy graf $G = \langle V, E, \gamma \rangle$, w którym dane są zbiory:
$V = \{u, w, x, y, z\}$ - zbiór wierzchołków,
$E = \{a, b, c, d, e, f, g, h, k, l, m\}$ - zbiór łuków
oraz funkcja γ postaci

e	a	b	c	d	e	f	g
γ(**e**)	(x, y)	(z, y)	(z, y)	(u, y)	(u, x)	(z, u)	(x, z)

h	k	l	m
(y, y)	(z, w)	(w, x)	(x, w)



Przykład



- krawędź h jest pętlą
- krawędzie c i b są wielokrotne (równoległe)
- krawędzie l i m nie są wielokrotne (równoległe)
- np. łuk g jest incydentny z wierzchołka x i jest incydentny w wierzchołek z.

Stopnie wierzchołków

Definicja: Stopień wyjściowy

Liczbę krawędzi skierowanych wychodzących z wierzchołka x nazywamy **stopniem wyjściowym** tego wierzchołka i oznaczamy przez $degout(x)$.

Definicja: Stopień wejściowy

Liczbę krawędzi skierowanych wchodzący do wierzchołka x nazywamy **stopniem wejściowym** tego wierzchołka i oznaczamy przez $degin(x)$.

Definicja: Stopień wierzchołka

Stopniem wierzchołka x w grafie skierowanym nazywamy sumę stopni wejściowych i wyjściowych tego wierzchołka

$$deg(x) = degout(x) + degin(x)$$

Definicja: Stopień grafu

Stopnień grafu skierowanego G określamy jako maksymalny stopień wierzchołka w tym grafie

$$\Delta(G) = \max_{v \in V} deg(v)$$

Źródło i ujście

W digrafach wyróżniamy szczególnie dwa typy wierzchołków, które nie występują w grafach nieskierowanych, są to źródła i ujścia.

Definicja: Źródło

Źródłem w digrafie nazywamy nieizolowany wierzchołek, do którego nie wchodzi żaden łuk.
Wierzchołek u jest w digrafie źródłem wtedy i tylko wtedy gdy

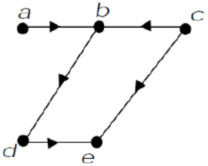
$$degin(u) = 0 \wedge degout(u) > 0$$

Definicja: Ujście

Nieizolowany wierzchołek digrafu, który nie jest początkiem żadnego łuku nazywamy **ujściem**.
Wierzchołek t jest w digrafie ujściem wtedy i tylko wtedy, gdy

$$degout(t) = 0 \wedge degin(t) > 0$$

Przykład



- Stopnie wierzchołków:

$$
\begin{aligned}
deg(a) &= degout(a) + degin(a) = 1 + 0 = 1 \\
deg(b) &= degout(b) + degin(b) = 1 + 2 = 3 \\
deg(c) &= degout(c) + degin(c) = 2 + 0 = 2 \\
deg(d) &= degout(d) + degin(d) = 1 + 1 = 2 \\
deg(e) &= degout(e) + degin(e) = 0 + 2 = 2
\end{aligned}
$$

- Stopień grafu:

$$\Delta(G) = \max_{v \in V} deg(u) = 3$$

- Źródłem w grafie są wierzchołki a i c
- Ujściem jest wierzchołek e

Reprezentacja macierzowa

Niech G będzie grafem, którego wierzchołki są oznakowane liczbami ze zboru $\{1, 2, \ldots, n\}$, natomiast krawędzie liczbami ze zbioru $\{1, 2, \ldots, m\}$, wówczas:

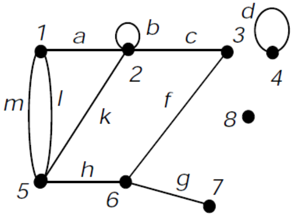
Definicja: Macierz sąsiedztwa

Macierzą sąsiedztwa grafu G nazywamy macierz wymiaru $n \times n$, której wyraz o indeksach i, j jest równy liczbie krawędzi łączących wierzchołek i z wierzchołkiem j. (W digrafie jest to liczba łuków prowadzący z wierzchołka i do wierzchołka j).

Definicja: Macierz incydencji

Macierzą incydencji grafu G nazywamy macierz wymiaru $n \times m$, której wyraz o indeksach i, j jest równy 1, jeśli wierzchołek i jest incydentny z krawędzią j i równy 0 w przeciwnym razie.

Przykład



$V = \{1, 2, \ldots, 8\}, \qquad E = \{a, b, c, d, e, f, g, h, k, l, m\},$
macierz sąsiedztwo oraz macierz incydencji:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Szczególne rodzaje grafów

Definicja: Graf pusty

Graf którego zbiór krawędzi jest zbiorem pustym, nazywamy **grafem pustym**. Graf pusty mający n wierzchołków oznaczamy symbolem N_n.

Definicja: Graf pełny

Graf prosty, w którym każda para różnych wierzchołków jest połączona krawędzią, nazywamy **grafem pełnym**. Graf pełny mający n wierzchołków oznaczamy symbolem K_n. W grafie pełnym jest $n(n-1)/2$ krawędzi.

Definicja: Graf regularny

Graf, w którym każdy wierzchołek ma ten sam stopień, nazywamy **grafem regularnym**. Jeśli każdy wierzchołek ma stopień r, to ten graf nazywamy **grafem regularnym stopnia** r lub krócej **grafem** r**-regularnym**.

Szczególne rodzaje grafów

Definicja: Graf cykliczny

Graf spójny, regularny stopnia 2, nazywamy **grafem cyklicznym**. Graf cykliczny mający n wierzchołków oznaczamy symbolem C_n.

Definicja: Graf liniowy

Graf otrzymany z grafu C_n przez usunięcie jednej krawędzi, nazywamy **grafem liniowym** o n wierzchołkach i oznaczamy symbolem P_n.

Definicja: Koło

Graf powstający z grafu C_{n-1} przez połączenie każdego wierzchołka z nowym wierzchołkiem v, nazywamy **kołem** o n wierzchołkach i oznaczamy go symbolem W_n.

Szczególne rodzaje grafów

Definicja: Grafy platońskie

Grafy platońskie to grafy regularne utworzone z wierzchołków i krawędzi pięciu wielościanów foremnych (czworościanu, sześcianu, ośmiościany, dwunastościanu i dwudziestościanu).

Definicja: Graf planarny

Grafem planarnym nazywamy graf, który można narysować na płaszczyźnie bez przecięć tzn. tak, by żadne dwie krawędzie nie przecinały się na rysunku poza wierzchołkiem, z którym obie są incydentne.

Definicja: Dopełnienie grafu prostego

Jeśli G jest grafem prostym o zbiorze wierzchołków V, to **dopełnieniem** grafu G jest graf o zbiorze wierzchołków V, w którym dwa wierzchołki są sąsiednie wtw, gdy nie są sąsiednie w grafie G.

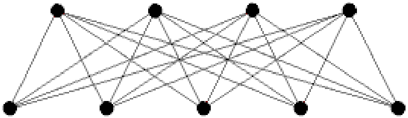
Szczególne rodzaje grafów

Definicja: Graf dwudzielny

Jeżeli zbiór wierzchołków grafu G może być podzielony na dwa zbiory rozłączne A i B w taki sposób, by każda krawędź grafu G łączyła wierzchołek zbioru A z wierzchołkiem zbioru B, to taki graf nazywamy **grafem dwudzielnym**.

Definicja: Graf pełny dwudzielny

Graf pełny dwudzielny jest to graf dwudzielny, w którym każdy wierzchołek zbioru A jest połączony dokładnie jedną krawędzią z każdym wierzchołkiem zbioru B. Graf pełny dwudzielny mający r wierzchołków w zbiorze A i s wierzchołków w zbiorze B oznaczamy symbolem $K_{r,s}$.

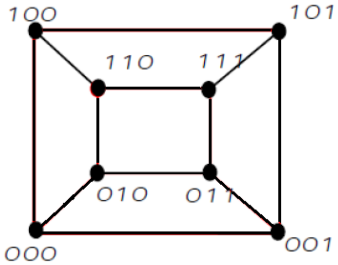


Szczególne rodzaje grafów

Definicja: Kostka

k-**kostką** Q_k nazywamy graf regularny dwudzielny, którego wierzchołki odpowiadają ciągom $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ takim, że każdy wyraz a_i jest równy 0 lub 1, i którego krawędzie łączą ciągi różniące się dokładnie jednym wyrazem. Graf Q_k ma 2^k wierzchołków i $k \cdot 2^{k-1}$ krawędzi oraz jest grafem regularnym stopnia k.

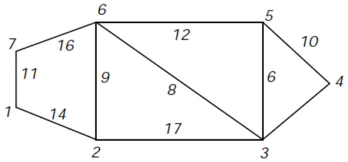
Kostka Q_3



Szczególne rodzaje grafów

Definicja: Graf ważony

Grafem ważonym nazywamy graf, w którym każdej krawędzi przyporządkowana jest liczba rzeczywista (czasami tylko nieujemna) zwana wagą tej krawędzi.

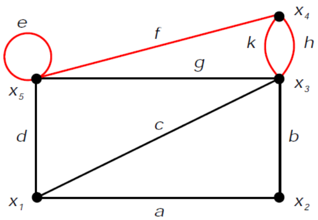


- Ważnym zastosowaniem grafów ważonych są sieci. W teorii grafów terminami określającymi węzeł jest wierzchołek, a łącze jest krawędzią.
- W sieci, waga krawędzi może oznaczać długość odcinka drogi, czas przejazdu, koszt budowy, przepustowość itp.

Droga

Definicja: Droga

Drogą w grafie G nazywamy ciąg krawędzi tego grafu $e_1 e_2 \ldots e_n$ taki, że koniec krawędzi e_{i-1} pokrywa się z początkiem krawędzi e_i. Droga tak ma długość $n+1$ równą liczbie krawędzi drogi.

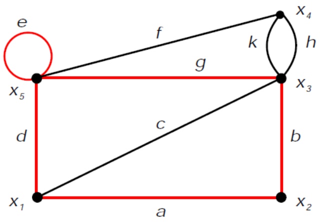


- Droga *efkhk* jest drogą w grafie G o długości 5
- Wierzchołek x_1 nazywamy wierzchołkiem początkowym, a x_3 wierzchołkiem końcowym
- Ciąg krawędzi *ec* nie jest drogą w grafie G

Droga zamknięta

Definicja: Droga zamknięta

Jeśli w drodze wierzchołek początkowy pokrywa się z wierzchołkiem końcowym, to taką drogę nazywamy **drogą zamkniętą**.

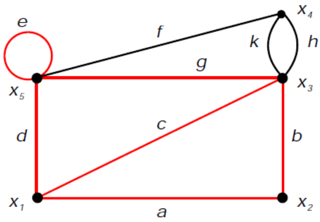


Droga *degba* jest drogą zamkniętą. Droga ta zaczyna się i kończy w wierzchołku x_1.

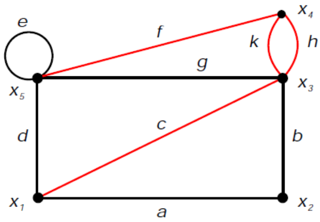
Droga prosta (ścieżka)

Definicja: Droga prosta (ścieżka)

Drogą prostą lub **ścieżką** nazywamy drogę, w której wszystkie krawędzie są różne.



Droga *degbac* jest drogą prostą
$x_1, x_5, x_5, x_3, x_2, x_1, x_3$

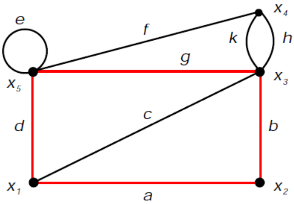


Droga *fkhkc* nie jest drogą prostą, ponieważ krawędź k powtarza się dwa razy.

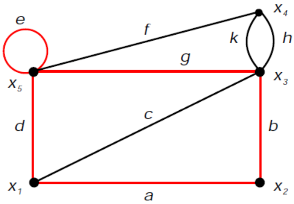
Cykl

Definicja: Cykl

Zamkniętą drogę prostą o długości $\geqslant 1$, której wszystkie wierzchołki są różne, nazywamy **cyklem**.



Droga *dgba* jest drogą prostą, zamkniętą.

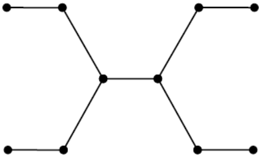


Droga *degba* nie jest cyklem.

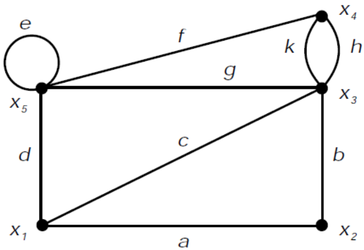
Cykl

Definicja: Graf acykliczny

Graf (drogę), która nie zawiera żadnego cyklu nazywamy **grafem acyklicznym** (**drogą acykliczną**).



Graf acykliczny.



Graf posiada cykle np. *fgh*, *acb* itd.

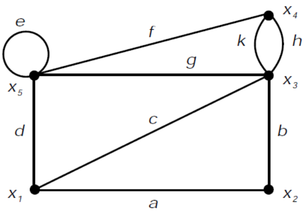
Odległość wierzchołków

Definicja: Wierzchołek osiągalny

Mówimy, że wierzchołek v jest **osiągalny** z wierzchołka u, jeśli istnieje droga z u do w.

Definicja: Odległość pomiędzy wierzchołkami

Odległością pomiędzy wierzchołkiem u **i wierzchołkiem** v nazywamy długość najkrótszej drogi od u do v i oznaczamy ją symbolem $d(u, v)$.



Odległość pomiędzy wierzchołkami x_2 i x_4 wynosi $d(x_2, x_4) = 2$.

Graf spójny

Definicja: Graf spójny

Graf G nazywamy **grafem spójnym**, jeżeli każdy jego wierzchołek jest osiągalny z każdego innego wierzchołka.

Definicja: Drzewo

Graf spójny i acykliczny nazywamy **drzewem**.

Definicja: Podgraf

Podgrafem danego grafu $G = \langle V, E \rangle$ nazywamy graf $G' = \langle V', E' \rangle$ taki, że $V' \subseteq V$ oraz $E' \subseteq E$.

Definicja: Składowa grafu

Spójny podgraf grafu G taki, że w G nie ma zawierającego go większego podgrafu spójnego, nazywamy **składową grafu** G.

Graf spójny

Definicja: Spójność krawędziowa

Jeśli graf G jest spójny, to jego **spójnością krawędziową** $\lambda(G)$ nazywamy najmniejszą liczbę krawędzi, które należy usunąć, by graf przestał być spójny.

Definicja: Spójność wierzchołkowa

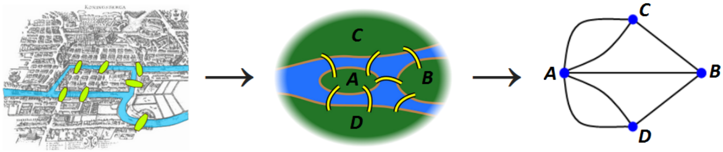
Jeśli graf G jest spójny i nie jest grafem pełnym, to jego **spójnością wierzchołkową** $\kappa(G)$ nazywamy najmniejszą liczbę wierzchołków, które należy usunąć, by graf przestał być spójny.

Uwaga

Jeśli z grafu usuwamy wierzchołek to usuwamy też wszystkie krawędzie z nim incydentne.

Zagadnienie mostów królewieckich

W Królewcu, na rzece Pregole są dwie wyspy (A i B) połączone ze sobą, a także z brzegami (C i D) za pomocą siedmiu mostów. Należy wyruszyć z dowolnej części lądowej miasta (A, B, C lub D), przejść przez każdy z mostów dokładnie jeden raz i powrócić do punktu wyjściowego (bez przepływania przez rzekę).



W 1736 problem został rozwiązany przez szwajcarskiego matematyka **Leonharda Eulera** (1707-1783). Zbudował on graf przedstawiony na rysunku przyporządkowując obszarom lądu wierzchołki, a mostom - krawędzie. Należało teraz odpowiedzieć na pytanie: Czy tak otrzymany graf ma drogę zamkniętą, która zawiera wszystkie krawędzie tylko raz?

Graf Eulera

Definicja: Cykl Eulera

Cyklem Eulera w grafie G nazywamy zamkniętą drogę prostą zawierającą wszystkie krawędzie tego grafu.

Definicja: Graf Eulera

Graf, w którym istnieje cykl Eulera nazywamy **grafem eulerowskim** albo **grafem Eulera**.

Definicja: Droga Eulera

Drogą Eulera w grafie G nazywamy drogę prostą zawierającą wszystkie krawędzie tego grafu.

Definicja: Graf półeulerowski

Graf, w którym istnieje droga Eulera nazywamy **grafem półeulerowskim**.

Twierdzenie Eulera

Lemat

Jeżeli dla każdego wierzchołka grafu G, $deg(v) \geqslant 2$, dla $v \in V$, wówczas graf zawiera cykl.

Twierdzenie Eulera (1736)

Graf spójny G jest grafem eulerowskiem (posiada cykl Eulera) wtedy i tylko wtedy, gdy stopień każdego wierzchołka grafu G jest parzysty.

Twierdzenie Eulera dla grafów skierowanych

Graf skierowany jest grafem Eulera wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego wierzchołka v, stopień wejściowy jest równy stopniowi wyjściowemu tj.

$$defin(v) = degout(v)$$

Twierdzenie Eulera

Wniosek

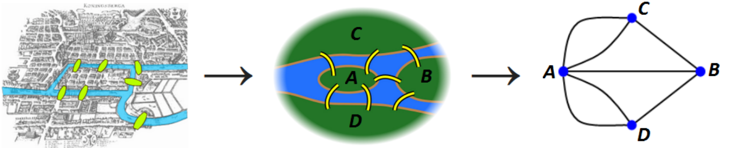
Graf spójny jest grafem eulerowskim wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór jego krawędzi można podzielić na rozłączne cykle.

Wniosek

Graf spójny jest grafem półeulerowskim wtedy i tylko wtedy, gdy ma dokładnie dwa wierzchołki nieparzystego stopnia.

Wniosek

Graf mostów królewieckich nie ma ani cyklu ani drogi Eulera.



Algorytm Fleury'ego

Algorytm Fleury'ego - algorytm pozwalający na znalezienie cyklu Eulera w grafie spójnym.

Krok 0 Sprawdź czy graf jest eulerowski.

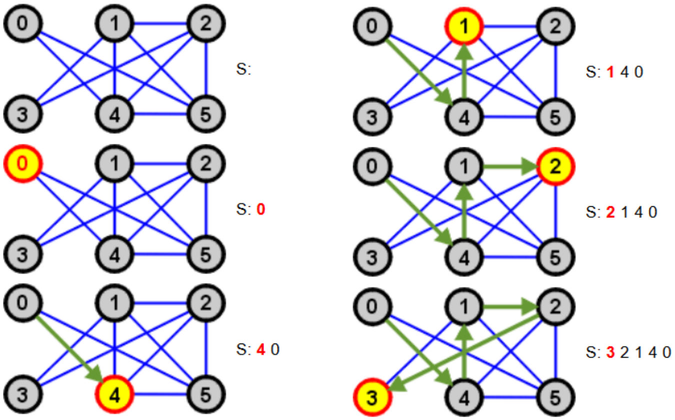
Krok 1 Zacznij cykl z dowolnego wierzchołka v_0.

Krok 2 Wybierz krawędź e_0 wychodzącą z wierzchołka v_0 po usunięciu której graf pozostanie spójny. Przejdź przez krawędź e_0 do wierzchołka v_1. Krawędź e_0 uznajemy za przebytą i usuwamy z grafu G.

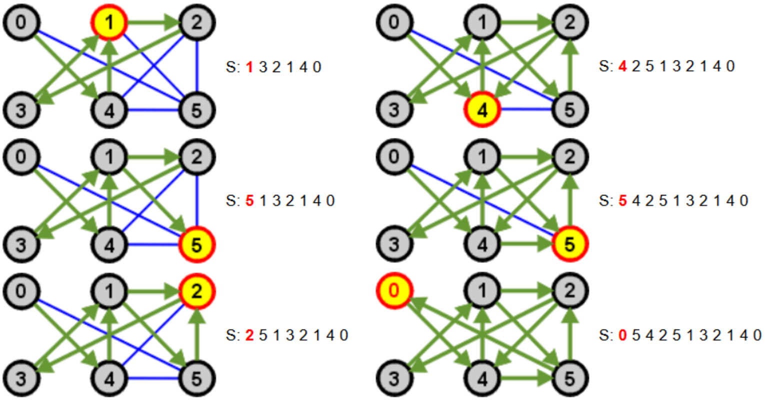
Krok 3 Powtarzamy krok 2 tak długo aż w G nie będzie żadnej krawędzi.

Powyższy algorytm można wykorzystać również do znalezienia drogi Eulera w grafie półeulerowskim, zaczynając od wierzchołka stopnia nieparzystego.

Algorytm Fleury'ego



Algorytm Fleury'ego



Zadanie chińskiego listonosza

Zadanie chińskiego listonosza

Zadanie to zostało sformułowane przez chińskiego matematyka Mei Ku Kwana. Polega na tym, że listonosz wychodząc z budynku pocztu musi obejść wszystkie ulice w swoim rejonie i powrócić do budynku, przechodząc jak najkrótszą drogę.

W języku teorii grafów należy w grafie spójnym znaleźć drogę zamkniętą z minimalną liczbą krawędzi (albo w przypadku grafu ważonego z najmniejszą sumą wag), która zawiera każdą krawędź co najmniej raz.

- Jeżeli graf jest eulerowski, to rozwiązanie problemu jest jednoznaczne i jest nim dowolny cykl Eulera.
- Jeżeli graf jest półeulerowski, to rozwiązaniem problemu jest droga Eulera i najkrótsza droga powrotna do punktu startowego.
- Gdy graf nie jest ani eulerowski, ani półeulerowski, to rozważany problem staje się trudny.
  - Rozwiązanie problemu polega na wyznaczeniu pewnych krawędzi, którymi trzeba się poruszać kilka razy.
  - Krawędzie, które dorysowujemy wyznacza się używając np. algorytmów wyznaczania maksymalnego przepływu i najkrótszych dróg.