Wykłady z Matematyki Dyskretnej

dla kierunku Informatyka

dr Adam Marszałek

Instytut Informatyki
Politechnika Krakowska

Wykłady na bazie materiałów:
dra hab. Andrzeja Karafiata
dr hab. Joanny Kołodziej, prof. PK

Kolorowanie wierzchołków

Definicja: Graf k-kolorowalny

Graf $G = \langle V, E \rangle$ bez pętli jest grafem k-**kolorowalnym**, jeśli każdemu wierzchołkowi możemy przypisać jeden z k kolorów w taki sposób, by sąsiednie wierzchołki miały różne kolory.

Definicja: Graf k-chromatyczny

Jeśli graf G jest k-kolorowalny, ale nie jest $(k-1)$-kolorowalny, to mówimy, że jest on k-**chromatyczny**.

Definicja: Liczba chromatyczna

Najmniejszą liczbę k równych kolorów potrzebnych do pokolorowania wierzchołków grafy G nazywamy **liczbą chromatyczną** tego grafu i oznaczamy przez $\chi(G)$.

Kolorowanie wierzchołków

Uwagi ogólne:

- Zagadnienie kolorowania grafów rozważamy tylko dla grafów spójnych.
- Istnienie krawędzi równoległych w grafie G nie ma znaczenia przy kolorowaniu jego wierzchołków.
- Wierzchołki z pętlami nie mogą być w ogóle kolorowane.

Problem kolorowania wierzchołków grafów rozpatrujemy tylko dla prostych grafów spójnych.

Liczby chromatyczne pewnych klas grafów

Twierdzenie

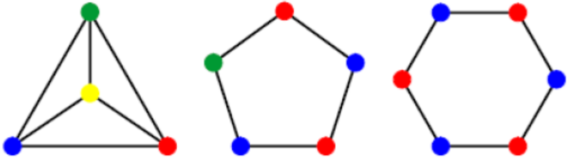
Dla grafu pełnego K_n mamy $\chi(K_n) = n$.

Twierdzenie

Jeżeli graf jest grafem cyklicznym C_n, to

$$\chi(C_n) = \begin{cases} 2 \text{ dla } n \text{ parzystego,} \\ 3 \text{ dla } n \text{ nieparzystego,} \end{cases}$$

co możemy zapisać inaczej $\chi(C_{2i+1}) = 3$, $\chi(C_{2i}) = 2$ dla $i \in \{1, 2, \ldots\}$.



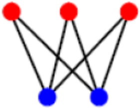
a) $\chi(K_4) = 4$ b) $\chi(C_5) = 3$ c) $\chi(C_6) = 2$

Liczby chromatyczne pewnych klas grafów

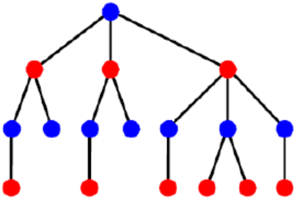
Twierdzenie

- $\chi(G) = 1$ jeżeli G jest grafem pustym (bez krawędzi).
- $\chi(G) = 2$ jeżeli G jest grafem dwudzielnym, w szczególności każde drzewo jest 2-chromatyczne.

$\chi(G) = 1$



$\chi(K_{3,2}) = 2$



$\chi(T) = 2$

Kolorowanie wierzchołków.

Algorytm zachłanny kolorowania wierzchołków grafu:

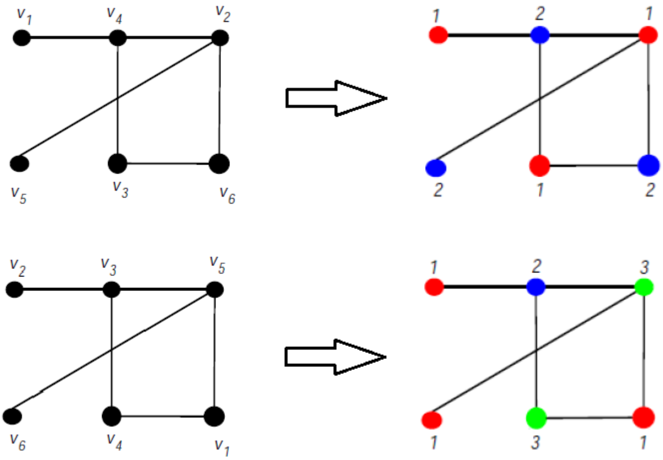
Dane: graf prosty G, o n wierzchołkach, którego wierzchołki są ponumerowane $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, kolory numerujemy od 1 do n
Wynik: pokolorowany graf G

ZAKG(G)

przypisz kolor 1 do wierzchołka v_1
for $k \leftarrow 2$ **to** n
    do
        dla wierzchołka v_k użyj pierwszego dostępnego koloru,
        który nie był wykorzystany do pokolorowania wierzchołka sąsiedniego

Kolorowanie wierzchołków. Przykład

Proces kolorowania rozpoczynamy od wierzchołka v_1.



Oszacowania liczby chromatycznej

Problem wyznaczenia liczby chromatycznej jest NP-trudny. Nie są znane niezawodne wielomianowe algorytmy wyznaczające liczbę chromatyczną każdego grafu. Istnieje jednak szereg oszacowań liczby chromatycznej dla różnych klas grafów.

Twierdzenie

Z definicji liczby $\chi(G)$ wynika, że jeżeli graf G ma n wierzchołków, to jego liczba chromatyczna jest nie większa od n, tzn.

$$|V| = n \Rightarrow \chi(G) \leqslant n.$$

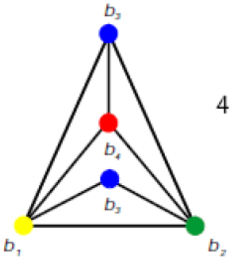
Oszacowania liczby chromatycznej

Definicja: Klika

Kliką grafu G nazywamy każdy jego podgraf pełny.

Twierdzenie

W dowolnym grafie mamy $\chi(G) \geqslant \omega$, gdzie ω jest rozmiarem (ilością wierzchołków) największej kliki grafu G.



$$4 \leq \chi(G) \leq 5$$

$$\chi(G) = 4$$

Oszacowania liczby chromatycznej. Twierdzenie Brooksa

Twierdzenie

Jeżeli graf G jest grafem prostym, w którym stopień grafu jest równy $\Delta(G)$, to $\chi(G) \leqslant \Delta(G) + 1$.

Równość w relacji powyżej zachodzi tylko w dwóch przypadkach:

- gdy graf G jest grafem pełnym $K_n (n \geqslant 3)$. Wiadomo wówczas, że $\Delta(K_n) = n - 1$ oraz $\chi(K_n) = n$.
- gdy graf G jest grafem cyklicznym o nieparzystej liczbie wierzchołków. Wiadomo wówczas, że $\Delta(C_{2i+1}) = 2$ oraz $\chi(C_{21+1}) = 3$.

Twierdzenie: Brooks (1914)

Jeżeli graf G jest spójnym grafem prostym, nie będącym grafem pełnym, i jeżeli największy stopień wierzchołka grafu G wynosi Δ (gdzie $\Delta \geqslant 3$), to graf G jest Δ-kolorowalny ($\chi(G) \leqslant \Delta$).

Oszacowania liczby chromatycznej

Uwaga

Oba poprzednie twierdzenia mają praktyczne zastosowanie wtedy, gdy wszystkie stopnie wierzchołków są w przybliżeniu takie same. W przypadku gdy w grafie występuje kilka wierzchołków wysokiego stopnia, to z tych twierdzeń otrzymujemy oszacowania bardzo odległe od faktycznej liczby chromatycznej. Najlepiej widać to na przykładzie grafu pełnego dwudzielnego $K_{2,s}$ (s dowolnie duże). Z twierdzenia mamy, że $\chi(K_{2,s}) \leqslant s+1$, jednak łatwo można stwierdzić, że $\chi(K_{2,s}) = 2$.

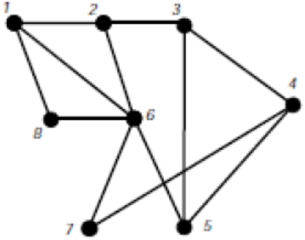
Definicja

Podzbiór wierzchołków $S \subset V$ grafu $G = \langle V, E \rangle$, nazywamy **niezależnym**, jeżeli żadne dwa wierzchołki tego podzbioru, nie są sąsiednie. W szczególności każdy podzbiór jednoelementowy zbioru V oraz zbiór pusty wierzchołków jest zbiorem niezależnym grafu G.

Oszacowania liczby chromatycznej

Definicja: Liczba niezależności

Liczbę $\alpha(G) = \max_i |S_i|$, gdzie zbiory S_i są wszystkimi niezależnymi zbiorami grafu G, nazywamy **liczbą niezależności** grafu G. Zbiór S^*, dla którego osiągnięte jest maksimum, nazywamy **maksymalnym zbiorem niezależnym**.



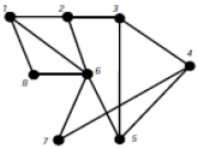
S_i: $\{2,5,7,8\}, \{1,3,7\}, \{2,4,8\}, \{4,6\}, \{3,6\}, \{1,5,7\}, \{1,4\}, \{3,7,8\}, \ldots$
$S^* = \{2,5,7,8\}$ oraz $\alpha(G) = 4$.

Oszacowania liczby chromatycznej

Własność: Oszacowanie od dołu.

Liczbę chromatyczną grafu G można oszacować następująco:

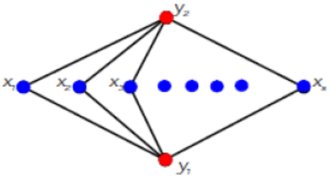
$$\chi(G) \geqslant \lceil \frac{n}{\alpha(G)} \rceil.$$



$$\chi(G) \geq \lceil \frac{8}{4} \rceil = 2$$

$$6 \geq \chi(G) \geq 2$$

Można zauważyć, że $\chi(G) = 3$.

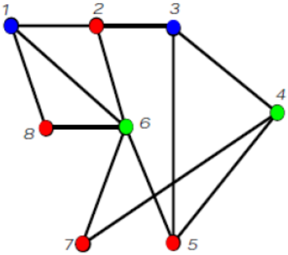


Dla grafu $K_{2,s}$ mamy $\alpha(G) = s$ oraz

$$\chi(G) \geq \lceil \frac{s+2}{\alpha(G)} \rceil = \lceil \frac{s+2}{s} \rceil = 2$$

Kolorowanie wierzchołków a zbiory niezależne

Problem pokolorowania wierzchołków grafu $G = \langle V, E \rangle$ jest równoważny z podzieleniem zbioru wierzchołków V na k rozłącznych podzbiorów niezależnych, takich że $\bigcup_{i=1}^{k} V_i = V$. Wówczas $\chi(G) = k$.



$V_1 = \{1, 3\}, \ V_2 = \{4, 6\}, \ V_3 = \{2, 7, 7, 8\}, \ V_1 + V_2 + V_3 = V$.
Graf G jest 3-kolorowalny i $\chi(G) = 3$.

Kolorowanie wierzchołków a grafy planarne

Definicja: Graf planarny

Graf G nazywamy **grafem planarnym** wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka geometryczna reprezentacja tego grafu, na której dowolne dwie krawędzie mogą mieć tylko jeden punkt wspólny będący wierzchołkiem incydentnym z tymi krawędziami.

Twierdzenie

Każdy planarny graf prosty jest 6-kolorowalny.

Twierdzenie

Każdy planarny graf prosty jest 5-kolorowalny.

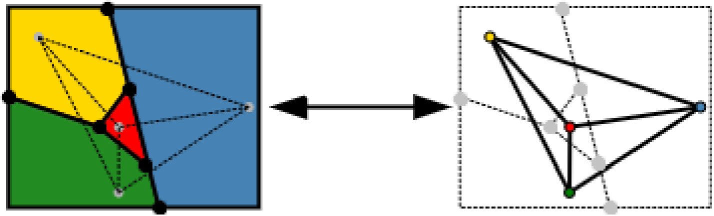
Twierdzenie: Appel i Haken (1976)

Każdy planarny graf prosty jest 4-kolorowalny (tzw. twierdzenie o 4 barwach). Dowód z użyciem komputera. (`https://www.youtube.com/watch?v=0hy-MnnGSdo`)

Kolorowanie map - kolorowanie ścian

Definicja: Mapa

Mapą nazywamy graf planarny 3-spójny, czyli taki który nie zawiera rozcięć mających 1 lub 2 krawędzie, a w szczególności nie ma wierzchołków stopnia 1 lub 2.



Kolorowanie map - kolorowanie ścian

Definicja: Mapa k-kolorowalna

Mapa jest k-**kolorowalna(f)**, jeśli jej ściany można pokolorować k kolorami w taki sposób, by żadne dwie ściany ograniczone wspólną krawędzią nie były pokolorowane tym samym kolorem.

Twierdzenie

Mapa G jest 2-kolorowalna(f) wtedy i tylko wtedy, gdy graf G jest grafem eulerowskim.

Twierdzenie: Dualność

Niech G będzie grafem planarnym bez pętli i niech G^* będzie grafem geometrycznie dualnym do grafu G. Wówczas graf G jest k-kolorowalnym wtedy i tylko wtedy, gdy graf G^* jest k-kolorowalnym(f).

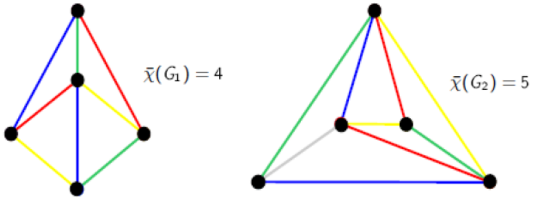
Kolorowanie krawędzi

Definicja: Graf k-kolorowalny krawędziowo

Graf $G = \langle V, E\rangle$ jest grafem **krawędziowo k-kolorowalnym**, jeśli jego krawędzie można pokolorować k kolorami w taki sposób, by przyległe krawędzie miały różne kolory.

Definicja: Indeks chromatyczny

Jeśli graf G jest krawędziowo k-kolorowalny ale nie jest krawędziowo $(k-1)$-kolorowalny, to mówimy, że jego **indeks chromatyczny** wynosi k, co oznaczamy $\overline{\chi}(G) = k$.

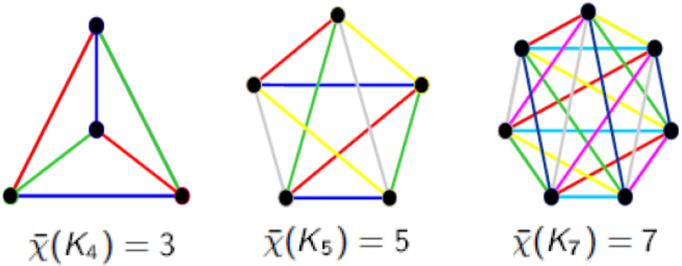


Indeks chromatyczny grafów pełnych

Twierdzenie

Indeks chromatyczny grafu pełnego K_n wynosi:

$$\overline{\chi}(K_n) = \begin{cases} n-1 \text{ jeżeli } n \text{ parzyste} \\ n \text{ jeżeli } n \text{ nieparzyste} \end{cases}$$

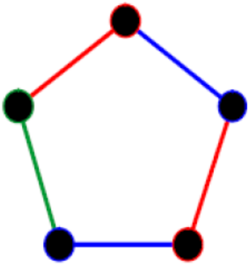


Indeks chromatyczny grafów cyklicznych

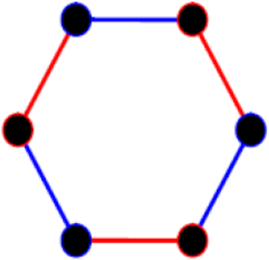
Twierdzenie

Indeks chromatyczny grafu cyklicznego C_n wynosi:

$$\overline{\chi}(C_n) = \begin{cases} 2 & \text{jeżeli } n \text{ parzyste} \\ 3 & \text{jeżeli } n \text{ nieparzyste} \end{cases}$$



$\bar{\chi}(C_5) = 3$



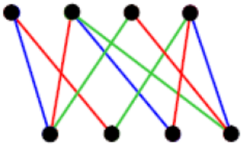
$\bar{\chi}(C_6) = 2$

Indeks chromatyczny grafów dwudzielnych

Twierdzenie: König (1916)

Jeżeli w grafie dwudzielnym G największy stopień wierzchołka jest równy Δ, to jego indeks chromatyczny wynosi

$$\overline{\chi}(K_{n,k}) = \Delta$$



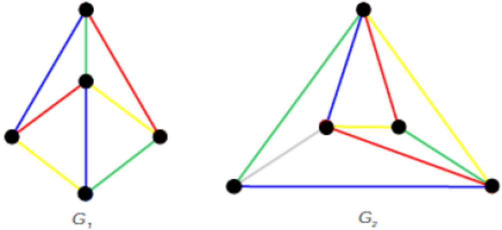
$\Delta = 3$ więc $\overline{\chi}(G) = 3$

Oszacowanie indeksu chromatycznego. Twierdzenie Vizinga

Twierdzenie: Vizing (1964)

Jeżeli graf G jest grafem prostym, w którym największy stopień wierzchołka wynosi Δ, to indeks chromatyczny spełnia nierówność

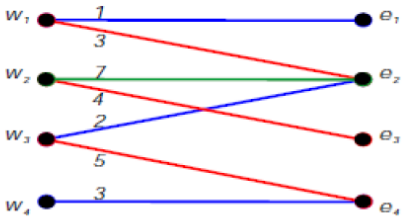
$$\Delta \leqslant \overline{\chi}(K_{n,k}) \leqslant \Delta + 1$$



W każdym z grafów G_1 i G_2 na rysunku największy stopień wierzchołka $\Delta(G_1) = \Delta(G_2) = 4$, natomiast $\overline{\chi}(G_1) = 4$ a $\overline{\chi}(G_2) = 5$.

Przykład zadania

Pewien serwis techniczny posiada cztery różne warsztaty $\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ oraz cztery różne ekipy specjalistów $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$. Serwis otrzymał do wykonania siedem różnych napraw w różnych miejscowościach. Każda naprawa wymaga odpowiedniej ekipy i odpowiedniego warsztatu, co przedstawia graf G na rysunku. W istniejących warunkach jedna ekipa, wyposażona w jeden warsztat, może jednego dnia wykonać co najwyżej jedną naprawę. Należy opracować taki plan realizacji napraw w poszczególnych dniach, aby liczba niezbędnych dni była minimalna.



Twierdzenie Halla, wersja małżeńska

Problem kojarzenia małżeństw. Rozważmy skończony zbiór dziewcząt, z których każda zna pewną liczbę chłopców.

Jakie warunki muszą być spełnione aby każda dziewczyna mogła poślubić któregoś ze znanych jej chłopców?

Twierdzenie: Hall, wersja małżeńska (1935)

Warunkiem **koniecznym i wystarczającym** na to, by problem kojarzenia małżeństw miał rozwiązanie, jest by każda podgrupa k dziewcząt znała łącznie co najmniej k chłopców.

Twierdzenie Halla, wersja grafowa

Definicja

Skojarzeniem w grafie dwudzielnym $G = \langle V_1 \cup V_2, E\rangle$ nazywamy podzbiór krawędzi grafu G, w którym żadne dwie krawędzie nie wychodzą z tego samego wierzchołka.

Definicja

Powiemy, że wierzchołek $v \in V_1$ **jest skojarzony**, jeśli istnieje wierzchołek $w \in V_2$ taki, że krawędź $\{v, w\}$ należy do skojarzenia.

Definicja

Pełnym skojarzeniem (skojarzeniem całkowitym) ze zbioru V_1 w zbiór V_2 grafu dwudzielnego $G = \langle V_1 \cup V_2, E\rangle$ nazywamy takie skojarzenie, w którym każdy wierzchołek z V_1 jest skojarzony.

Twierdzenie Halla, wersja grafowa

Definicja

Niech $G = \langle V_1 \cup V_2, E\rangle$ będzie grafem dwudzielnym. Wprowadźmy następujące oznaczenie: Niech dla każdego podzbioru A zbioru V_1 zbiór $\phi(A)$ będzie zbiorem tych wierzchołków należących do V_2, które sąsiadują z co najmniej jednym wierzchołkiem ze zbioru A.

Twierdzenie Halla

Niech $G = \langle V_1 \cup V_2, E\rangle$ będzie grafem dwudzielnym. Wówczas istnieje skojarzenie całkowite z V_1 do V_2 wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego podzbioru A zbioru V_1 zachodzi nierówność $|A| \leqslant |\phi(A)|$.

Algorytm Halla

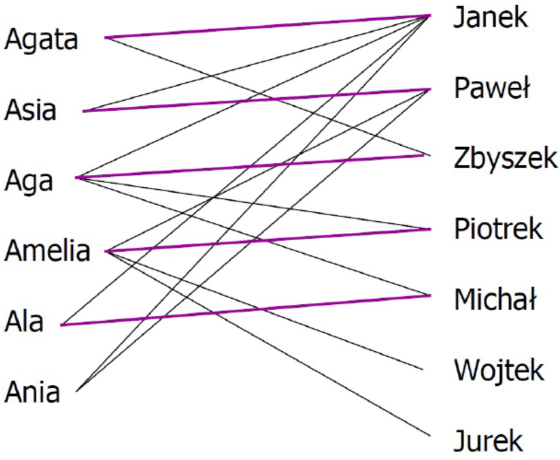
Przykład

Agata zna Janka i Zbyszka
Asia zna Pawła i Janka
Aga zna Janka, Zbyszka, Piotrka i Michała
Amelia zna Pawła, Piotrka, Wojtka i Jurka
Ala zna Janka i Michała
Ania zna Pawła i Janka

Algorytm Halla znajdowania mężów:
Niech B_i to zbiór chłopców, których zna dziewczyna a_i. Dopóki jest to możliwe dobieramy kolejnym dziewczynom $a_1, a_2, a_3, \ldots$ chłopców $b_1, b_2, b_3, \ldots$, przy czym $b_1 \in B_1, b_2 \in B_2 \setminus \{b_1\}, b_3 \in B_3 \setminus \{b_1, b_2\}$ itp.

Jeśli uda się to zrobić dla wszystkich dziewczyn, to algorytm znajdowania mężów kończy się.

Algorytm Halla



Algorytm Halla

Jeżeli jednak dla pewnej dziewczyny a_j zbiór znanych jej chłopców $B_j \setminus \{b_1, b_2, \ldots, b_{j-1}\}$ jest już pustym to trzeba zerwać przynajmniej jedne zaręczyny. W tym celu **urządzamy przyjęcie**.

Dziewczyna a_j (Ania) urządza przyjęcie, na które zaprasza wszystkich znajomych jej chłopców. Chłopcy ci przychodzą ze swoimi narzeczonymi, ale te - na wszelki wypadek - zabierają ze sobą znajomych chłopców, a ci swoje narzeczone itd, aż do momentu gdy na przyjęcie zostanie zaproszony chłopiec, który nie jest jeszcze zaręczony.

Paweł + Asia
Janek + Agata

Zbyszek + Aga
Michał + Ala
Piotrek + Amelia
Wojtek

Algorytm Halla

Musi się taki znaleźć, bo każda grupa r dziewcząt zna w sumie co najmniej r chłopców, czyli dziewczyny zaproszone na przyjęcie znają w sumie co najmniej tyle samo chłopców, a ponadto dziewczyna a_j nie jest zaręczona.

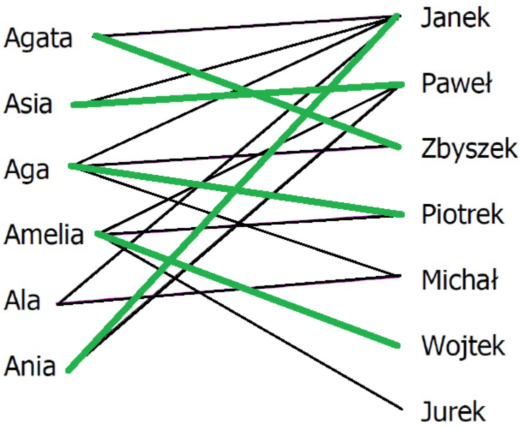
Ów niezaręczony chłopiec będzie tańczył z dziewczyną, która go zaprosiła, jej narzeczony - z dziewczyną która go zaprosiła, itd, aż na parkiecie znajdzie się chłopiec tańczący z gospodynią przyjęcia. Pary na parkiecie będą to nowe pary narzeczonych, a te, które nie tańczą pozostaną niezmienione.

Wojtek + Amelia
Piotrek + Aga
Zbyszek + Agata
Janek + Ania

Paweł + Asia
Michał + Ala

Algorytm Halla

Po przyjęciu wszystkie dziewczyny $a_1, a_2, \ldots, a_j$ mają narzeczonych i możemy kontynuować dobieranie narzeczonych dla kolejnych dziewczyn.



Egzamin termin 0

Egzamin z zagadnień poruszanych na wykładzie:
09.06.2018 godz. 10:30 s.S1