

Metody uporządkowania

- W trakcie faktoryzacji macierzy rzadkiej ilość zapełnieni istotnie zależy od sposobu numeracji równań. Powstaje problem odnalezienia takiej numeracji, przy której ilość zapełnieni będzie minimalną.
- Koszt obliczeniowy odnalezienia numeracji optymalnej nie ustępuje kosztowi faktoryzacji macierzy rzadkiej przy braku uporządkowania. Dla tego na praktyce nie używają optymalizacji ściślej, tylko algorytmy heurystyczne.
- Skutki tego:
 - istnieje dość dużo różnych algorytmów heurystycznych
 - żaden z nich nie doprowadzi do rozwiązania optymalnego, tylko do lepszego lub gorszego przybliżenia do rozwiązania optymalnego
 - dla każdego podanego problemu z góry nie jasne, który algorytm heurystyczny będzie najlepszym

- Rozważymy dwa zupełnie różnych algorytmy uporządkowania: metoda włożonych przekrojów (nested dissection method - ND) i algorytm minimalnego stopnia (minimum degrees algorithm - MDA).

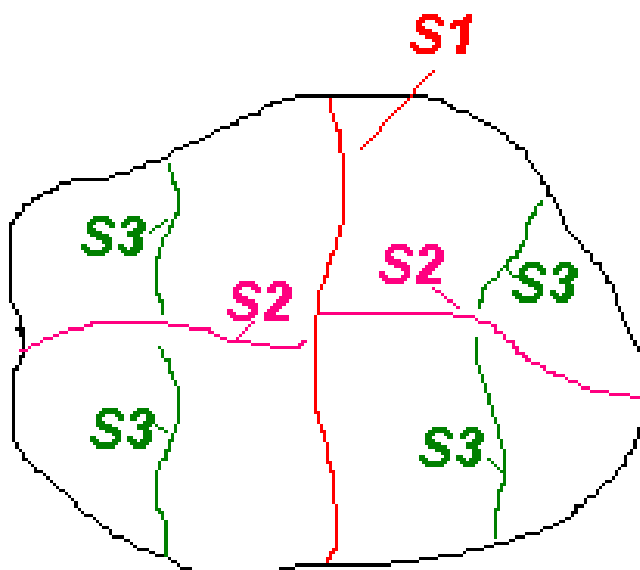
Metoda włożonych przekrojów (nested dissection method)

- Jest dany spójny graf $G(X,E)$. Zbiór węzłów S tworzy separator. To oznacza, że usunięcie tych węzłów z grafu powoduje rozdzielenie grafu G na dwa lub więcej spójnych podgrafów $G_1, G_2, \dots$.

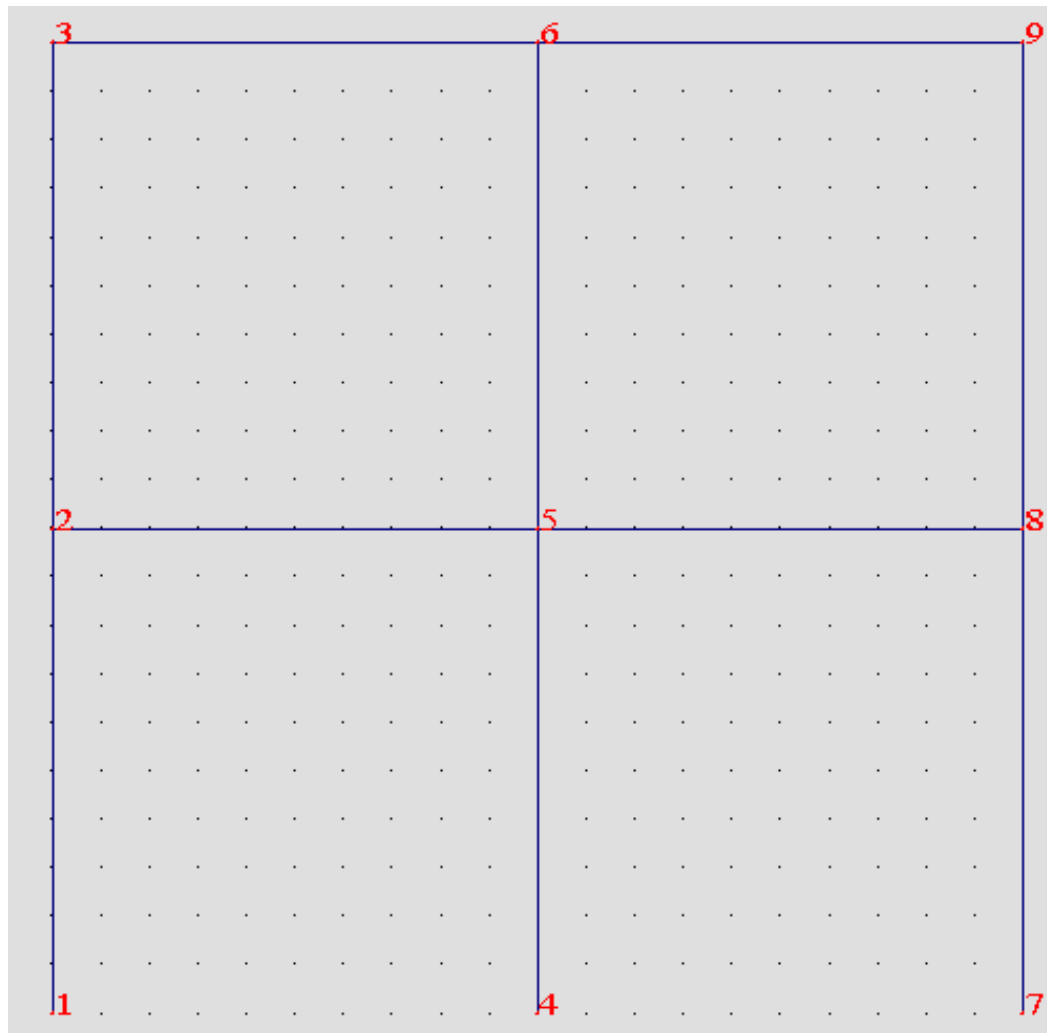
Idea metody

1. Tworzymy strukturę poziomów z korzeniem w pseudo peryferyjnym wierzchołku. Ustawiamy $i = 1$ (i – bieżący numer separatora).
2. Zbiór wierzchołków, który znajduje się na poziomie środkowym struktury poziomów, zaznaczamy jako separator S_i , jeśli ilość poziomów $N_{lvl} > 2$, i zapisujemy te wierzchołki w tablicy permutacji Perm. Jeśli $N_{lvl} \leq 2$, cały podgraf traktujemy jako nierozdzielny i zapisujemy w Perm. N_{lvl} – liczba poziomów.

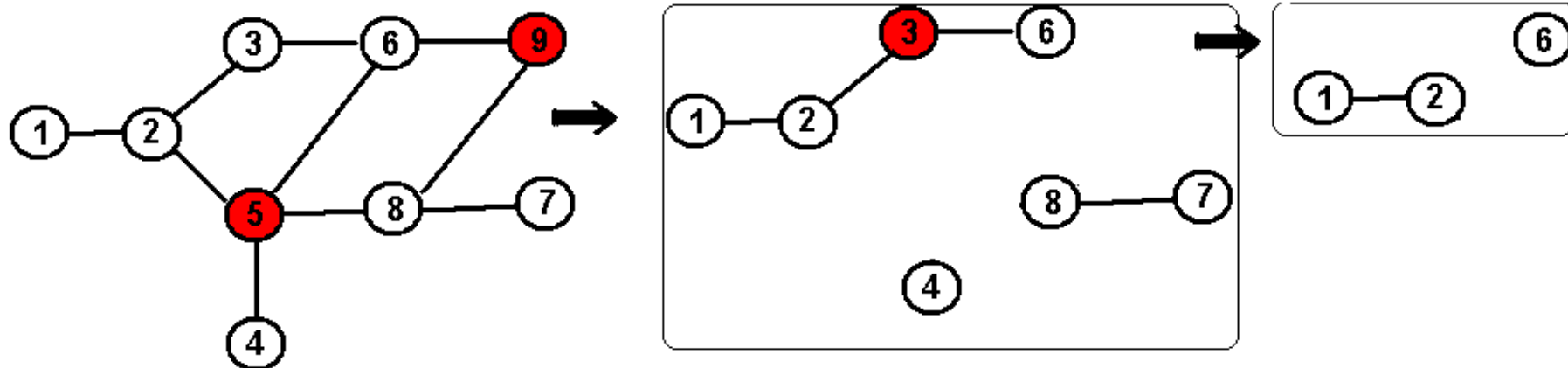
3. Usuwamy zbiór S_i z grafu, graf pozostaje rozdzielony na podgrafy. $i++$.
 4. Dla każdego z podgrafów tworzymy strukturę poziomów z korzeniem w pseudo peryferyjnym wierzchołku i przechodzimy do punktu 2.
 5. Algorytm renumeracji będzie przerwany, kiedy wszystkie wierzchołki pozostaną przenumerowane.
- Na każdym kroku podziału graf pozostaje rozdzielony na dwa (lub kilka) mniej-więcej równoważne podgrafy dla tego że separatory są wybrane z poziomu środkowego. Dla tego tą metodę nazywają metodą rekursywnych bisekcji.



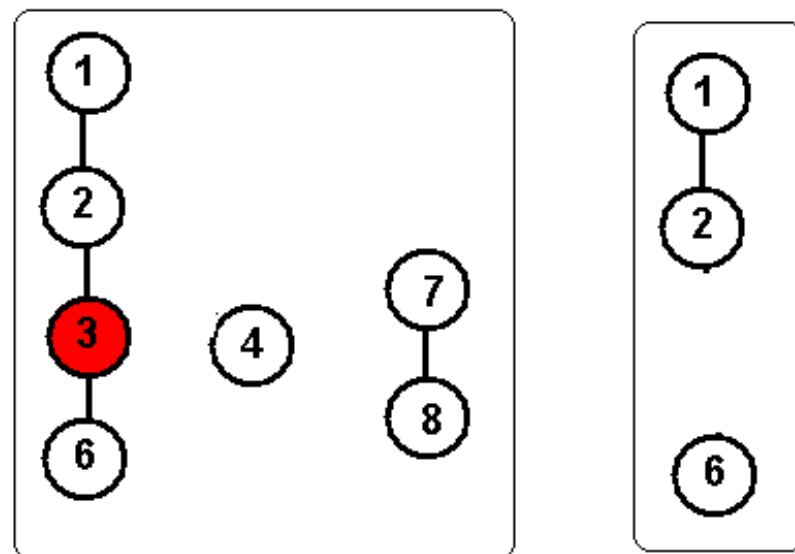
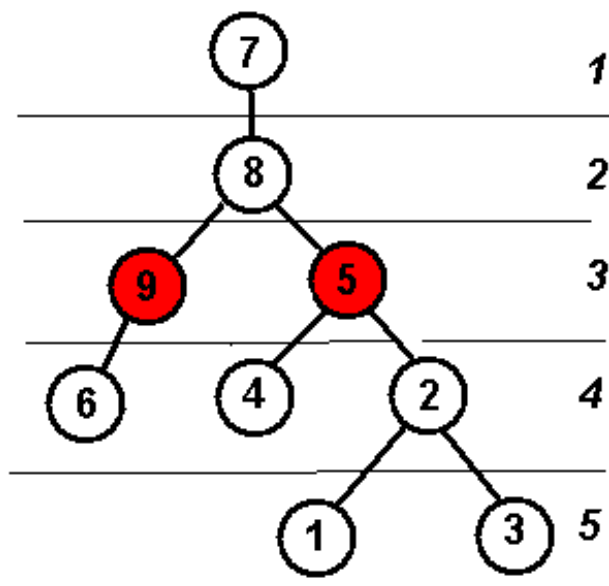
➤ **Przykład: rama płaska**



Etapy wprowadzenie separatorów na grafie

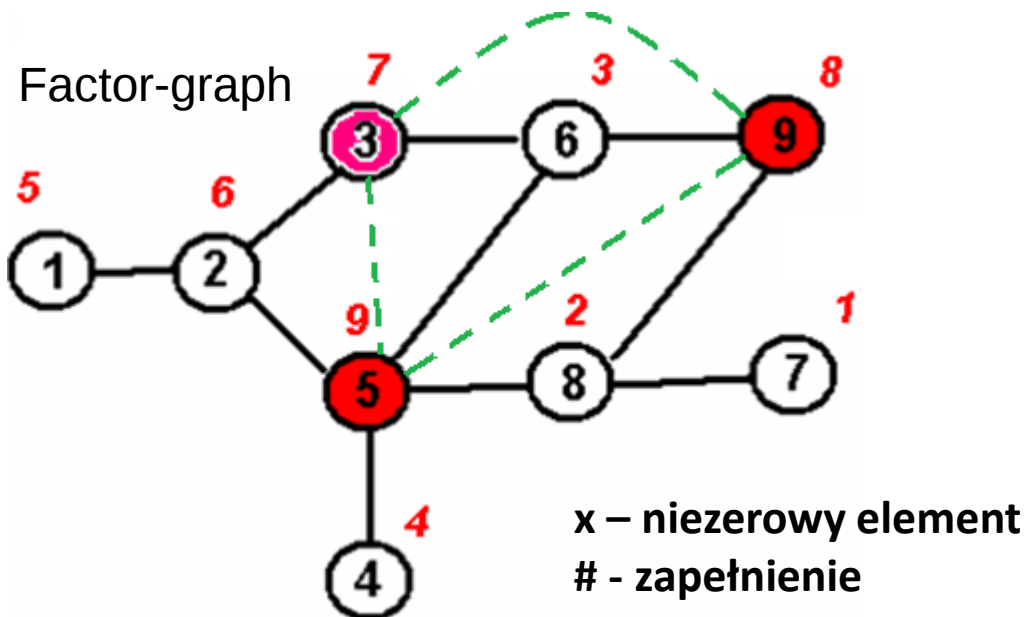


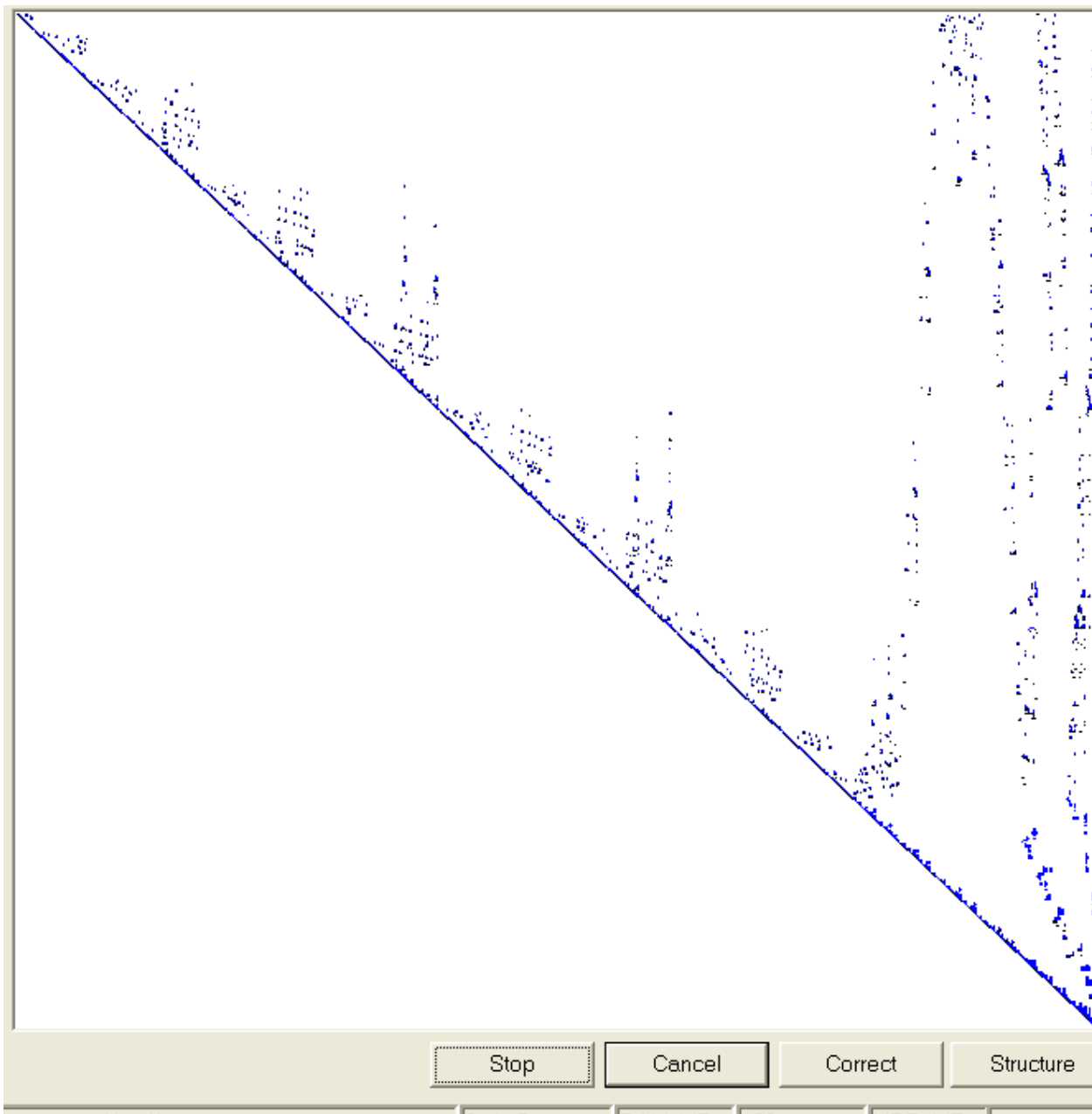
Odpowiednie struktury poziomów



Kolejność numeracji – tablica $Perm[newNode] = oldNode$

- **Separatory: $S_1 = 9, 5$; $S_2 = 3$;**
- **Wierzchołki pozostałe (nierozdzielne) w kolejności ich powstania: 1, 2; 4; 6; 7, 8**
- **Zapisujemy w tablicy Perm w odwrotnej kolejności wierzchołki pozostałe, a później – separatory (też w odwrotnej kolejności): Perm = (7, 8, 6, 4, 1, 2, 3, 9, 5);**


$$\left(\begin{array}{cccccccc} 7 & x & & & & & & \\ x & 8 & & & & & x & x \\ & & 6 & & & & x & x & x \\ & & & 4 & & & & & x \\ & & & & 1 & x & & & \\ & & & & x & 2 & x & & x \\ & & & & & x & 3 & \# & \# \\ & & x & & & & \# & 9 & \# \\ x & x & & & & & & & \\ x & x & x & & x & \# & \# & & 5 \end{array} \right)$$



**Typowy wygląd
macierzy przy
uporządkowaniu
metodą włożonych
przekrojów**

Algorytm minimalnego stopnia (minimum degrees algorithm)

Eliminacje Gaussa na grafie spójności (twierdzenie D. J. Rose)

Żeby wyeliminować wierzchołek x z grafu (równanie o numerze x z macierzy), trzeba:

- 1. Usunąć ten wierzchołek z grafu, przy tym odciąć wszystkie krawędzie, które wychodzą z tego wierzchołku**
- 2. Dodać do grafu krawędzie tak, żeby wierzchołki z $Adj(x)$ byli w grafie przetworzonym przyległymi po param.**

➤ Stopień wierzchołka jest równy ilości przyległych wierzchołków. W trakcie faktoryzacji stopień wierzchołka może ulegnąć zmianie.

Idea algorytmu minimalnego stopnia:

na każdym kroku eliminacji wykluczamy wierzchołek, stopień którego jest minimalny

$$\begin{pmatrix} d_{11} & & & x \\ & d_{22} & & x \\ & & d_{33} & x \\ x & x & x & d_{44} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} d_{11} & x & x & x \\ x & d_{22} & z & z \\ x & z & d_{33} & z \\ x & z & z & d_{44} \end{pmatrix}$$

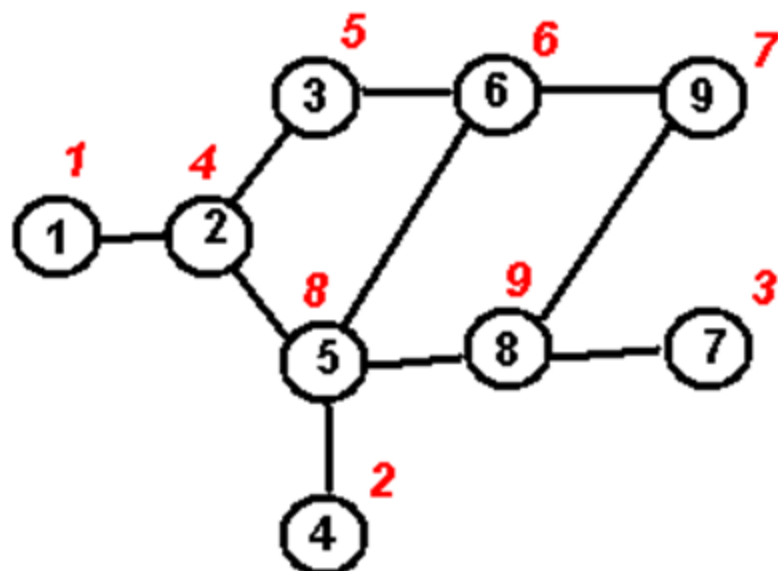
Jeśli w wiersze wiodącym (pierwszy wiersz w przykładzie) ilość niezerowych elementów (x) jest najmniejsza, to prawdopodobieństwo powstania wypełnieni (z) w macierzy jest minimalna. Z tego i wynika idea eliminacji na każdym kroku równania, które zawiera minimalną ilość elementów niezerowych (na grafie to odpowiada wykluczeniu wierzchołka, z którego wychodzi minimalna ilość krawędzi. Oznacza to, że ten wierzchołek ma minimalną ilość wierzchołków przyległych).
Krawędź na grafie odpowiada niezerowemu elementowi macierzy.

Algorytm:

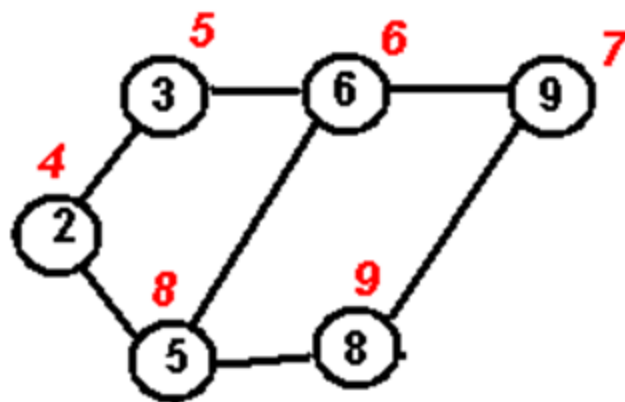
- 1. Znajdujemy wierzchołek, stopień którego jest minimalny.**
 - 2. Przesławiamy wiersze i kolumny macierzy tak, żeby z góry się okazało równanie dla wierzchołka z minimalnym stopniem.**
 - 3. Eliminujemy to równanie i ponownie wyznaczamy stopnie pozostałych wierzchołków. (W trakcie eliminacji stopnie wierzchołków mogą być zmienione)**
 - 4. Przechodzimy do p. 1.**
- **Dla macierzy realnych nigdy nie przesławiamy wiersze i kolumny macierzy. To jest bardzo pracochłonna procedura.**
 - **Zamiast tego używamy faktoryzacji symbolicznej, która na podstawie operacji na grafie przyległości nadaje możliwość prześledzić cały proces faktoryzacji bez wykonania obliczeń wartości elementów macierzy. Wynikiem tej procedury jest położenie niezerowych elementów macierzy sfaktoryzowanej.**

- **Symboliczna faktoryzacja nadaje możliwość dla algorytmu minimalnego stopnia ustalić kolejność eliminowania wierzchołków, nie rozkładając macierzy faktycznie**
- **Wyznaczyć ilość zapełnieni dla dowolnej metody uporządkowania, nie rozkładając macierzy faktycznie.**
- **To jest bardzo szybka procedura, która nadaje możliwość w krótki okres czasu sprawdzić kilka różnych algorytmów uporządkowania i wybrać ten, który dla podanej macierzy doprowadzi do mniejszej ilości zapełnieni.**
- **Przykład – SCAD lub SOLVER**

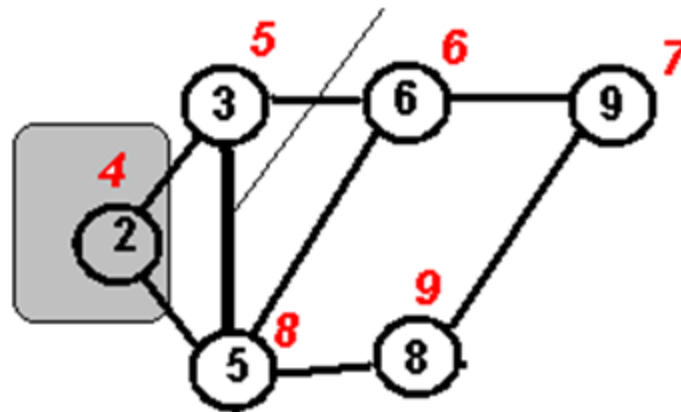
1. Initial graph



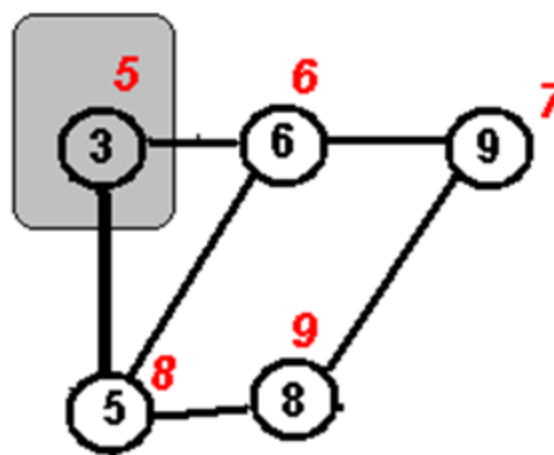
2. Elimination of vertexes 1, 4, 7



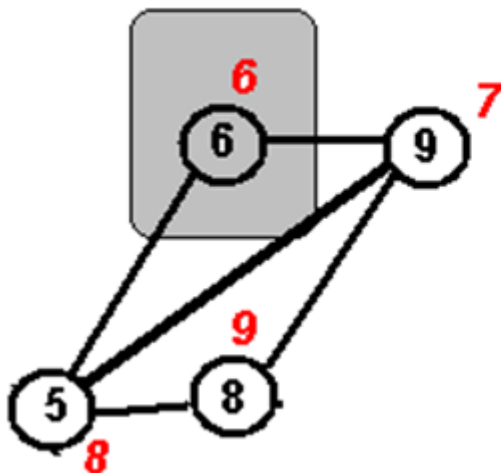
3. Elimination of vertex 2
fill-inn



4. Elimination of vertex 3

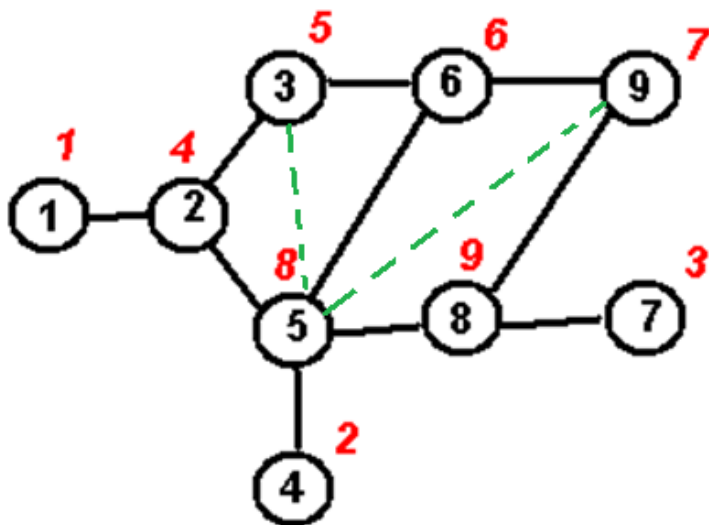


5. Elimination of vertex 6

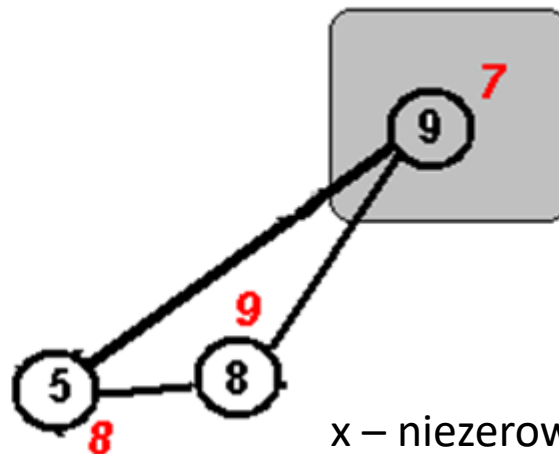


Perm: 1, 4, 7, 2, 3, 6, 9, 5, 8

Factor-graph

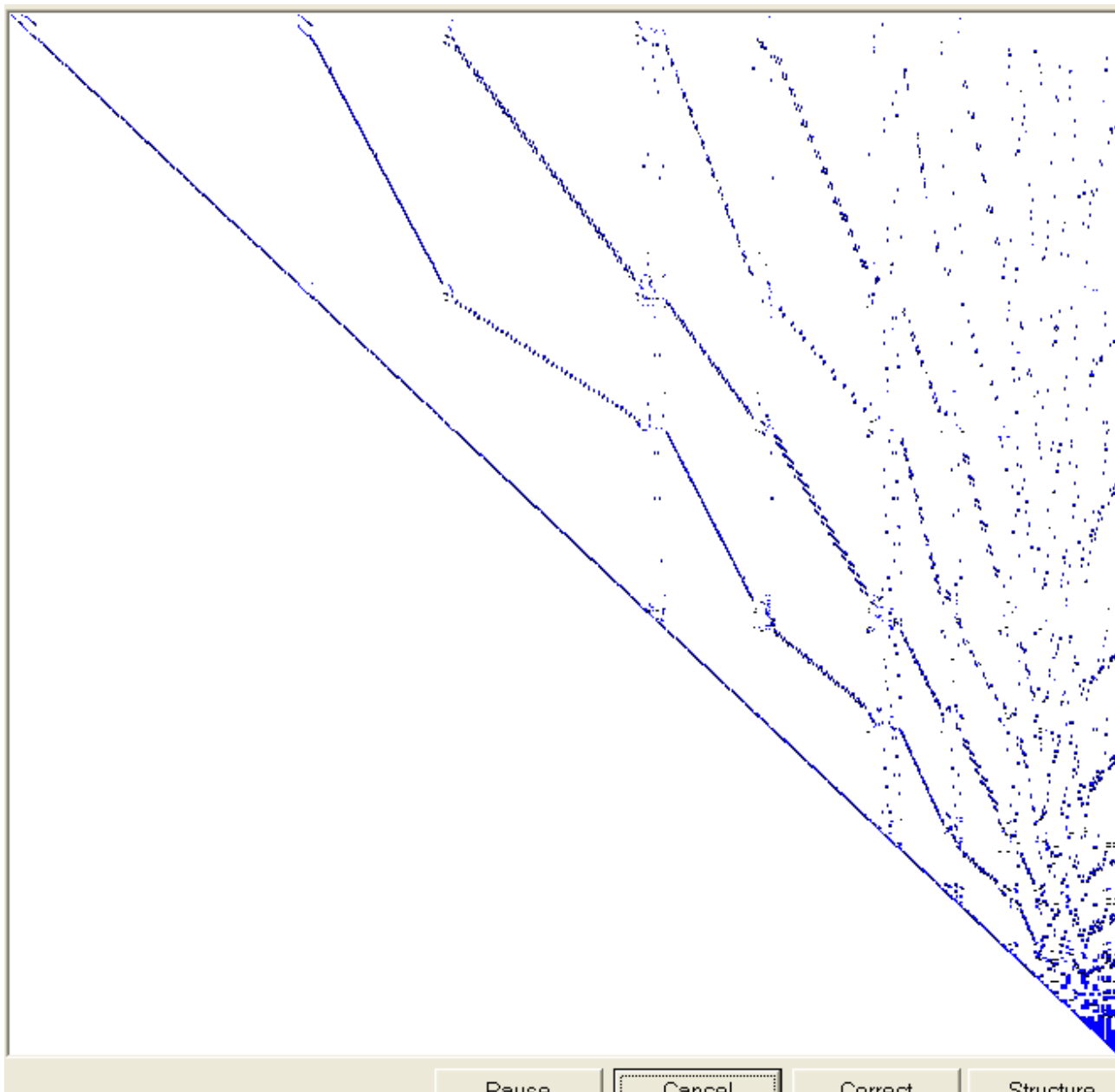


6. Elimination of vertex 9

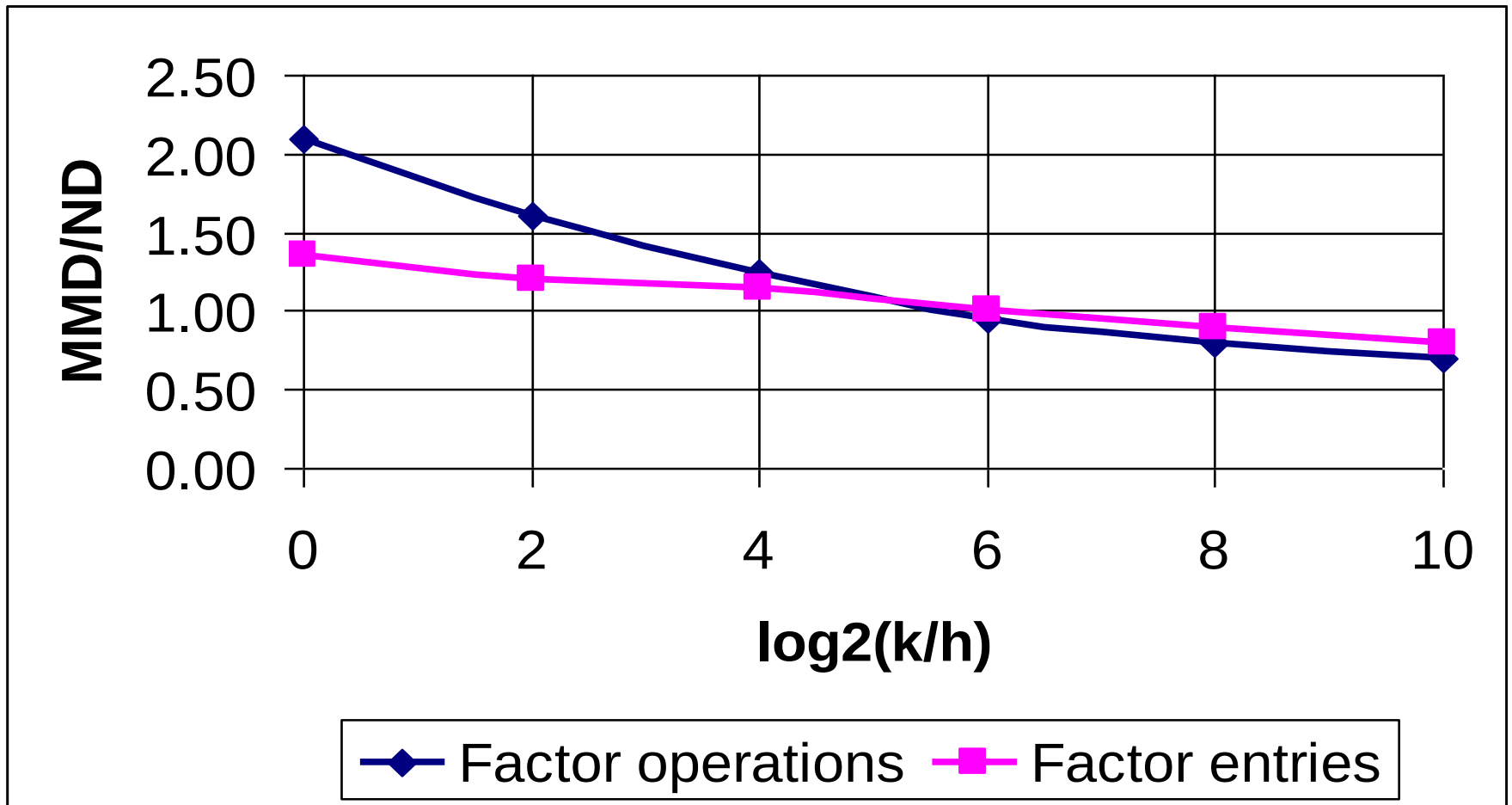


x – niezerowy element
- uzupełnienie

$$\begin{pmatrix} 1 & & & x & & & & & \\ & 4 & & & & & & x & \\ & & 7 & & & & & & x \\ x & & & 2 & x & & & x & \\ & & & x & 3 & x & & \# & \\ & & & & x & 6 & x & x & \\ & & & & & x & 9 & \# & x \\ & x & & x & \# & x & \# & 5 & x \\ & & x & & & & x & x & 8 \end{pmatrix}$$



**Typowy wygląd
macierzy przy
uporządkowaniu
algorytmem
minimalnego
stopnia**



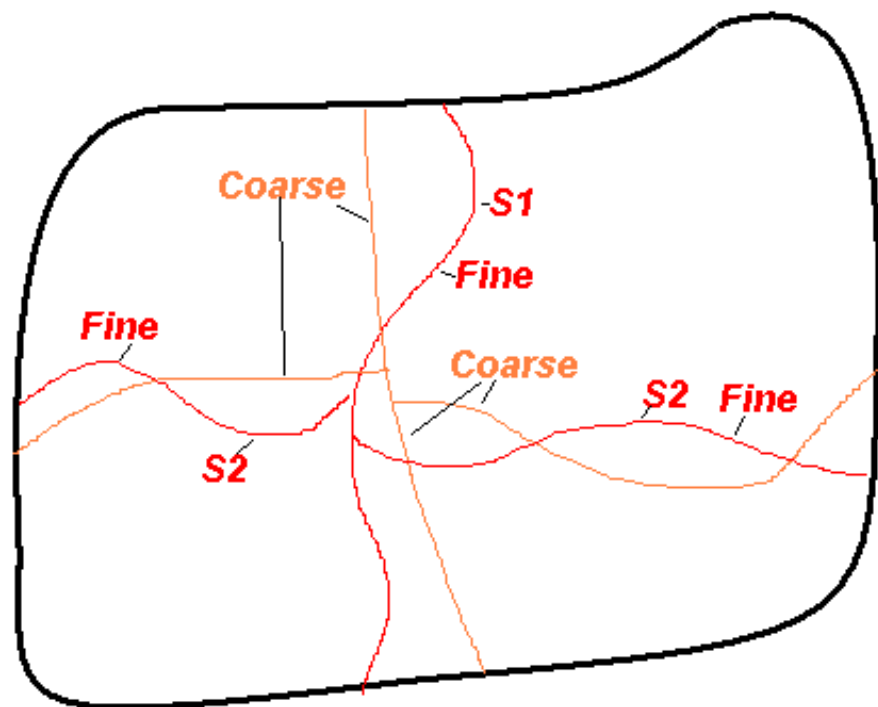
ND - metoda włożonych przekrojów
MMD – Algorytm minimalnego stopnia
 k / h – stosunek podziału siatki we wzdluznym i
poprzecznym kierunkach

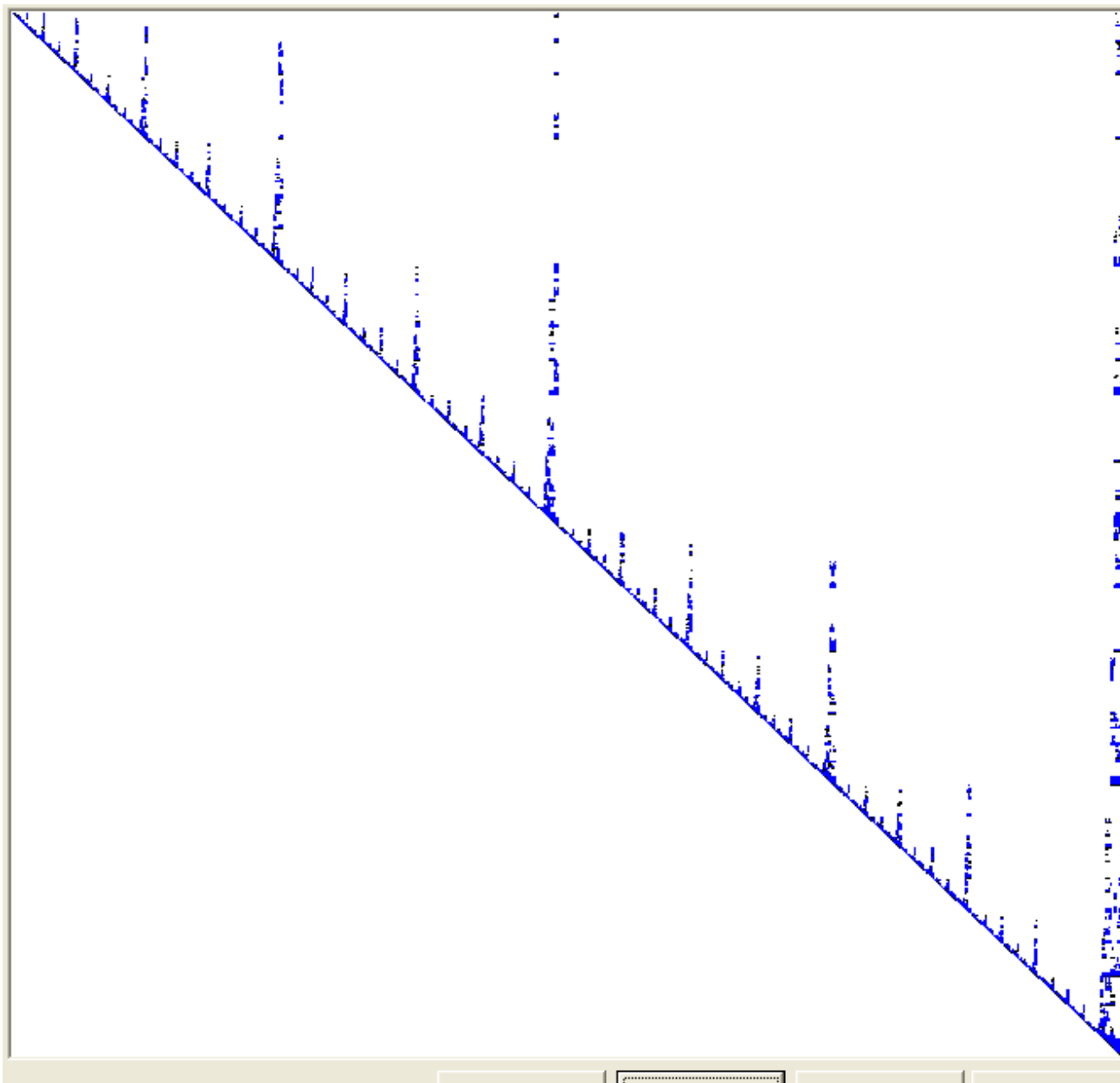
- Algorytm minimalnego stopnia jest zbyt „krótkowzroczny” - ma dobre przewidywanie dla stosownie nie wielu kroków faktoryzacji.
- Metoda włożonych przekrojów – zbyt „dalekowzroczna” – słabe przewidywanie bliskich kroków faktoryzacji.
- Algorytm minimalnego stopnia nie spełnia wymogi load balance.
- Na podstawie doświadczenia było wykryto, że lepsze wyniki dla dowolnego uporządkowania udaje się najczęściej uzyskać, jeśli używać graf zgrubiony (coarse graph) zamiast grafu szczególnego. Jednym z podejść naturalnych jest użycie grafu dla węzłów modelu obliczeniowego zamiast grafu dla równań, wychodząc z tego, że w każdym węźle istnieje grupa równań.
- Uporządkowanie hybrydowe – próba połączyć zalety algorytmu minimalnego stopnia i metody włożonych przekrojów. Jeśli do tego dołożyć zgrubienie grafu – powstaje uporządkowanie wielopoziomowe hybrydowe. Jednym z takich podejść jest METIS.

Idea

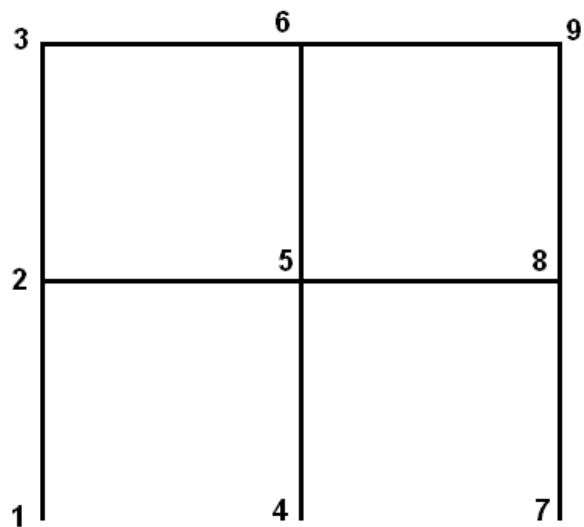
1. Zgrubiamy podany graf przyległości
2. Na grafie zgrubionym wykonujemy 2^n kroków bisekcji rekursywnych metodą włożonych przekrojów (n jest wartość stosownie nie wielka – metoda włożonych przekrojów nie jest zakończoną) – znajdujemy 2^n separatorów na grafie zgrubionym.
3. Znajdujemy separatory na grafie źródłowym – zastosujemy refinement dla separatorów odnalezionych.
4. Uporządkowanie w obrębie każdego spójnego podgrafu wykonujemy algorytmem minimalnego stopnia.

$$\begin{pmatrix} 6 & & & x & & & & x & x \\ & 1 & x & & & & & & \\ x & & x & 2 & x & & & & x \\ & & & & & 8 & x & x & x \\ & & & & & x & 7 & \# & \# \\ & & & & & & & 4 & x \\ x & & \# & x & \# & & 9 & \# & \\ x & x & \# & x & \# & x & \# & 5 \end{pmatrix}$$





**Typowy wygląd
macierzy przy
uporządkowaniu
metodą
wielopoziomową**



$$\begin{pmatrix} 7 & x & & & & & & & \\ x & 8 & & & & & & x & x \\ & & 6 & & & & x & x & x \\ & & & 4 & & & & & x \\ & & & & 1 & x & & & \\ & & & x & 2 & x & & & x \\ & & x & & & x & 3 & \# & \# \\ & x & x & & & & \# & 9 & \# \\ x & x & x & & x & \# & \# & 5 \end{pmatrix}$$

NDM

$$\begin{pmatrix} 1 & & x & & & & & & \\ & 4 & & & & & & x & \\ & & 7 & & & & & & x \\ x & & & 2 & x & & & x & \\ & & & x & 3 & x & & \# & \\ & & & & x & 6 & x & x & \\ & & & & & x & 9 & \# & x \\ & x & & x & \# & x & \# & 5 & x \\ & & x & & & & x & x & 8 \end{pmatrix}$$

MMD

$$\begin{pmatrix} 6 & & x & & & & & x & x \\ & 1 & x & & & & & & \\ & x & 2 & x & & & & & x \\ x & & x & 3 & & & & \# & \# \\ & & & & 8 & x & & x & x \\ & & & & x & 7 & & \# & \# \\ & & & & & & 4 & & x \\ x & & \# & x & \# & & 9 & \# & \\ x & & x & \# & x & \# & x & \# & 5 \end{pmatrix}$$

Multilevel